Klausurvorbereitung Mathe II

Themen:
1) Potenzreihen, Taylor-Reihe, Fourier-Reihe
2) Funktionen im $\mathbb{R}^n$, Differentiation
3) Extrema
4) Parameter- & Kurvenintegrale
5) Integrale im $\mathbb{R}^n$

§1 1.1 Potenzreihen

Funktionenreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ heißt Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Konvergenzradius R: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ oder $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Konvergenzbereich $(x_0 - R, x_0 + R)$, punktweise.
Reihe divergiert für $|x - x_0| > R$.

$[x_0 - r, x_0 + r]$, $r < R$, gleichmäßig.

Randverhalten $x_0 - R$, $x_0 + R$ gesondert betrachten.

Aufgabe P13:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (= e^{-x})$ Entw.pkt. 0, Koeff. $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

$\frac{1}{R} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow$ Konv.radius $R = \infty \Rightarrow$ Konv.gebiet $\mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n e^n} (x-1)^n$ Entw.pkt. 1, Koeff. $a_0 = 0$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n e^n}$, $n \geq 1$.

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$.

Betrachte Randpunkte:

$1-e$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n e^n} (-e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ divergiert (harmon. Reihe)

$1+e$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n e^n} (e^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \to$ konvergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzgebiet $(1-e, 1+e]$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)}$, Entw. pkt. 0, $a_0 = 0$, $a_{2k} = 1/\ln(k)$, $a_{2k+1} = 0$, ~~allen~~ $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{\ln k}} = 1$$

Betrachte Randpunkte:

$-1, 1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzgebiet $\underline{\underline{(-1, 1)}}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n$, Entw. pkt. 2, Koeff. $a_n = n^2 5^n$.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \; 5 \cancel{(x-2)} \sqrt[n]{n^2} = 5$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^2}{\cancel{5} n^2} = \cancel{5}\, 5 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{5}$$

Betrachte Randpunkte:

$$\left.\begin{aligned} 2-\tfrac{1}{5}: &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 \\ 2+\tfrac{1}{5}: &\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \end{aligned}\right\} \text{divergiert}, \quad \Rightarrow \text{Konv. gebiet } \underline{\underline{\left(2-\tfrac{1}{5}, 2+\tfrac{1}{5}\right)}}$$

1.2 Taylor - Reihe

Spezielle Potenzreihe zum Entwpkt. x_0 mit Koeff. $\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$:

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

(Schreiben auch

$$Tf(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \quad)$$

Taylorpolynom der Ordnung m :

$$T_m f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \qquad \text{(Polynom v. Grad } m-1\text{)}$$

Restglied : $R_m f = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} h^m$ für ξ ~~$\in [x_0, x_0+h]$~~ zwischen x_0 und x_0+h.

- $T_2 f$ gibt Tangentengleichung in $f(x_0)$
- geeignet zur lokalen Approximation : besser für große m, kleine h

wichtige Reihen : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} , \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} .$$

Aufgabe P21: $f(x) = \sin^2(x) \cdot e^x$

a)
$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^x + \sin^2(x)\cdot e^x = e^x \cdot \sin(2x) + f(x)$$
$$f''(x) = e^x \cdot \sin(2x) + e^x \cdot 2\cos(2x) + f'(x)$$
$$f'''(x) = e^x \cdot \sin(2x) + 4e^x \cos(2x) - 4e^x \cdot \sin(2x) + f''(x)$$
$$f^{(4)}(x) = 4e^x \cdot \cos(2x) - 3e^x \cdot \sin(2x) - 6e^x \cdot \cos(2x) - 8e^x \cdot \sin(2x) + f'''(x)$$
$$= -e^x \cdot (\cancel{4}\, 11 \sin(2x) + 2\cos(2x)) + f'''(x).$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 6, \quad f^{(4)}(0) = 4$$

$$\Rightarrow T_5 f(x) = \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4 = \underline{\underline{x^2 + x^3 + \frac{1}{6}x^4}}$$

b) $T_5 \sin(x) = x - \frac{1}{3!} x^3$

$T_5 \exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4$

$$
\begin{aligned}
(T_5 \sin(x))^2 \cdot T_5 \exp(x) &= (x - \tfrac{1}{6} x^3)^2 (1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{24} x^4) \\
&= (x^2 - \tfrac{1}{3} x^4 + \tfrac{1}{36} x^6)(1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{24} x^5) \\
&= x^2 - \tfrac{1}{3} x^4 + x^3 + \tfrac{1}{2} x^4 + \mathcal{O}(x^5) \\
&= x^2 + x^3 + \tfrac{1}{6} x^4 + \mathcal{O}(x^5) \\
&= T_5 f(x) + \mathcal{O}(x^5).
\end{aligned}
$$

1.3 Fourier - Reihe

trigonometrische Reihe, für periodische Funktionen.

Verwenden $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $n \geq 1$.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π - periodisch

$$\mathcal{F}f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

mit $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\,dx.$$

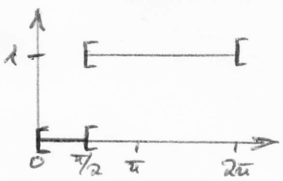
Eigenschaften:

- für stetige, diffbar ~~glatte~~ f gilt $\mathcal{F}f = f$ (glm. Konvergenz d. Fourier-Reihe)
- an Sprungstellen $\mathcal{F}f(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$
- f gerade $\Rightarrow b_n = 0$
- f ungerade $\Rightarrow a_n = 0$.

Aufgabe aus Klausur WS 06/07:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, \pi/2) \\ 1 & , x \in [\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

a)



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} 1\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\pi = 3/2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(nx) \Big|_{\pi/2}^{2\pi} = -\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\pi n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi} \cdot (-\cos(nx)) \Big|_{\pi/2}^{2\pi} = \frac{(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}g(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1}{\pi n} \sin(nx).$$

b)

$$\underset{\text{Sprungstelle}}{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}g(0) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}, \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2k \\ (-1)^k & , n = 2k+1 \end{cases} \quad k \geq 0$$

$$= \frac{3}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \pi \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

1.4 Nebenbei: Funktionenfolgen

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzfunktion f

punktweise Konvergenz: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle x

gleichmäßige Konvergenz: existiert Nullfolge $a_n > 0$, so dass

$|f_n(x) - f(x)| < a_n$ für alle x und alle n.

glm. konv. $\Rightarrow$ pktw. konv.

$\Downarrow$

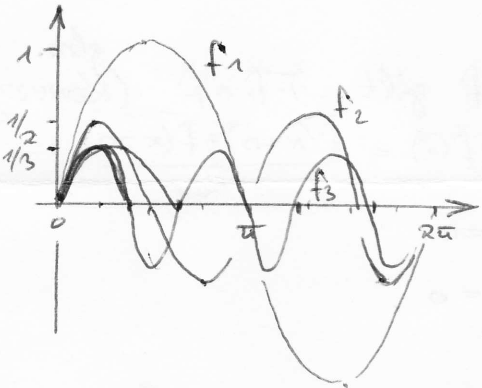
Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration: $\int \lim f_n = \lim \int f_n$

Beispiel: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in (n-1, n] \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$f_n \to 0$ pktw. aber nicht glm.

Aufgabe P14: $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n\cdot x)$

a)



b) $|f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $x \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ glm. Konvergenz

c) $f_n'(x) = \cos(nx)$

$f_n'(\pi) = (-1)^n \Rightarrow$ nicht pktw. konv.

$\Rightarrow$ nicht glm. konv.

~~1.5 Nebenbei: Multiple Choice~~

~~Aufgaben 4.1 – 4.3:~~

~~4.1)~~