

Klausurvorbereitung

Analysis I und II

4. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Integration und Verschiedenes
Dipl.-Math. Tristan Alex
Dipl.-Math. Miroslav Vržina

SS 2011
10. August 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Bestimmte Integrale)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x + 1} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 2}} dx.$$

Aufgabe G2 (Unbestimmte Integrale)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx \quad \text{mit } s \geq 1.$$

Aufgabe G3 (Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration)

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, jedoch

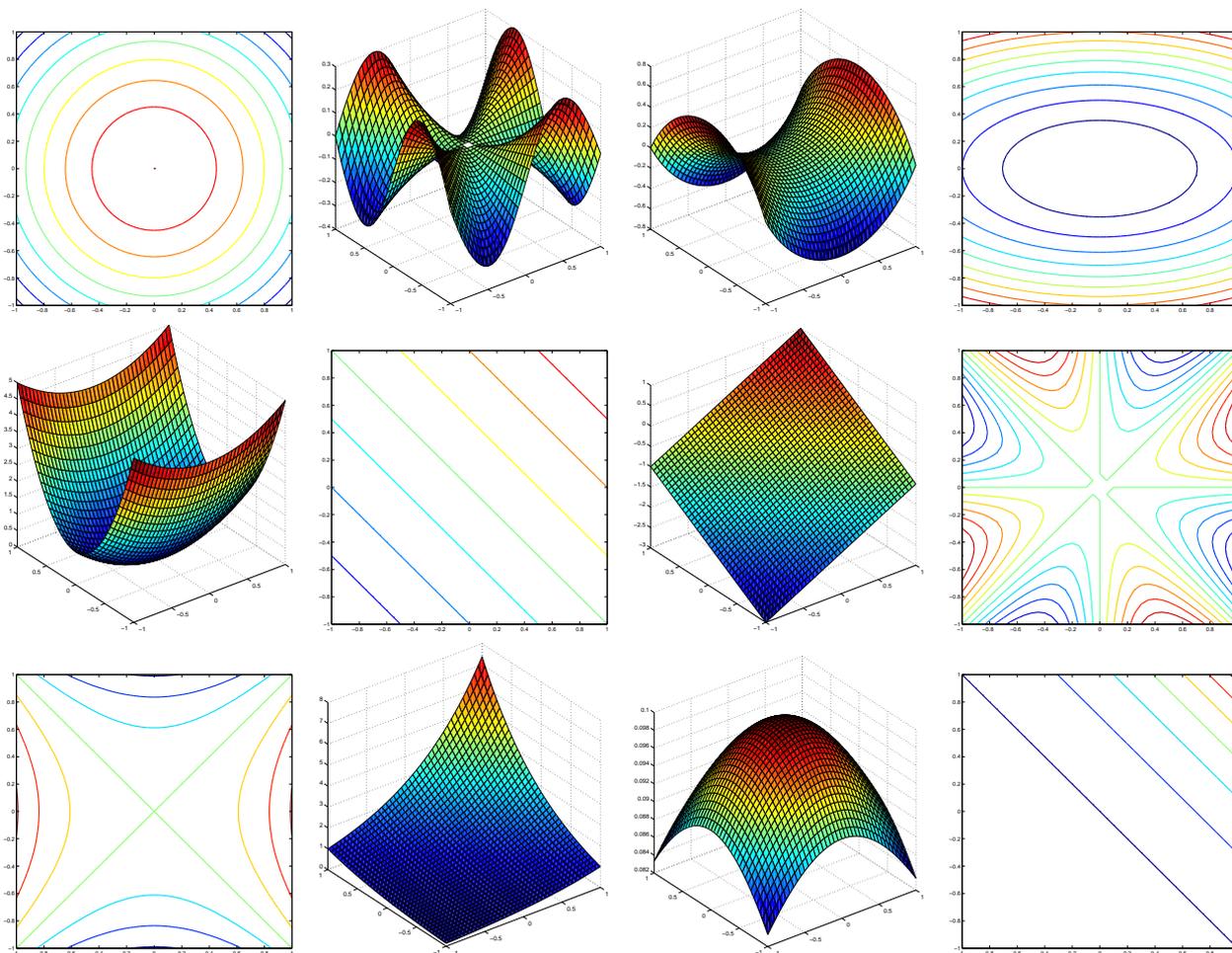
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1 \neq \int_0^{\infty} 0 dx$$

gilt. Ist dies ein Widerspruch zu dem Satz aus Abschnitt 12.19?

Zusatzübung

Aufgabe Z1 (Funktionenchaos)

In den Bildern sehen Sie Funktionsgraphen und Höhenlinien. Welche Graphen gehören zu welchen Höhenlinien oder umgekehrt?



Aufgabe Z2 (Mehrfachintegration kann ganz nützlich sein)

- (a) Sei $R > 0$ und $K_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Berechnen Sie das Integral $\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$ mit Hilfe der Transformation auf Polarkoordinaten.
- (b) Berechnen Sie nun $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$.
- (c) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Hinweis: Sie dürfen $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$ benutzen.

Bemerkung: Das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ kann man nicht elementar angeben.