Klausurvorbereitung
Analysis II
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2011**
Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher **08. August 2011**
Dipl.-Math. Tristan Alex
Dipl.-Math. Miroslav Vržina

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Totales Differential)
Sei B eine reelle $n \times n$-Matrix. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle Bx, x\rangle$. Wir wollen zeigen, dass die Funktion f differenzierbar ist und ihre Ableitung $\mathrm{d}f_{x_0}$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bestimmen. Wir gehen dabei wie folgt vor:

(a) Finden Sie eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine reellwertige Funktion $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass die Gleichung

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + \|h\| \cdot r(h), \qquad h \in \mathbb{R}^n,$$

erfüllt ist.

Hinweis: Für $h = 0$ gilt diese Gleichung trivialerweise. Definieren Sie $r(0) := 0$.

(b) Zeigen Sie $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$.

Aufgabe G2 (Differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist, aber die partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ unstetig sind.

Aufgabe G3 (Differenzierbarkeit, Gradient und Richtungsableitung)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto xy + 2x \sin(y + \pi/2) + e^{-y} \cos(x).$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f. Ist f differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls ihre Ableitung an.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}(f)(x, y)$ von f an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$.

(d) Für welche Richtungen w gilt $\partial_w f(0,0) = 0$?

Aufgabe G4 (Extremwertbestimmung)
Auf der Menge $Q := [0,\pi] \times [0,\pi]$ betrachten wir die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y).$$

Finden Sie den kleinsten und größten Wert von f auf der Menge Q. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Begründen Sie ohne Rechnung, warum f überhaupt einen kleinsten und größten Wert auf Q besitzt.

(b) Geben Sie – ohne Begründung – das Innere und den Rand von Q an.

(c) Finden Sie alle lokalen Extrema von f im Inneren von Q.
Hinweis: Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u).$$

(d) Betrachten Sie nun die Funktion f eingeschränkt auf den Rand von Q: Berechnen Sie $f(x,y)$ für $(x,y) \in \partial Q$.

(e) Benutzen Sie nun Ihre Ergebnisse aus (b) und (c) um den kleinsten und größten Wert von f anzugeben.

Aufgabe G5 (Topologie)
Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen oder kompakt sind. Geben Sie außerdem das Innere, den Abschluss, den Rand und die isolierten Punkte an:

(a) $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$,

(b) $\mathbb{R} \setminus \left(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\right)$ in $\mathbb{R}$,

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$.