Klausurvorbereitungskurs Analysis II Funktionenfolgen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Tristan Alex (alex@mathematik.tu-darmstadt.de)
Miroslav Vržina (vrzina@mathematik.tu-darmstadt.de)

Punktweise Konvergenz

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon D \to \mathbb{C}$ Funktionenfolge. f_n konvergiert in x_0, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ existiert.
- Wenn der Grenzwert für alle x_0 existiert: f_n punktweise konvergent.
- Grenzwert: $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle x.
- Also: x wird fest gelassen, n geht gegen ∞.

Gleichmäßige Konvergenz

- f_n konvergiert gegen f, falls folgende Bedingung erfüllt ist:
$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$
- Hier: alle x werden gleichzeitig betrachtet! Das Supremum der Abstände zwischen $f(x)$ und $f_n(x)$ muss gegen Null gehen.
- Impliziert punktweise Konvergenz! Also: f_n konvergiert nicht punktweise $\Rightarrow$ auch nicht gleichmäßig. Wenn konvergent, dann ist punktweiser Grenzwert identisch.
- Aber: es gibt Folgen, die punktweise konvergieren, aber nicht gleichmäßig.
- Wichtiges Werkzeug: wenn f_n alle stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren, dann ist auch f stetig.
- Meist: f_n stetig aber f nicht $\Rightarrow$ f_n konvergiert nicht gleichmäßig.

Potenzreihen

- Konvergenzradius nach Hadamard: $r = \liminf_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.
- Falls existent, kann auch Wurzel- oder Quotientenkriterium benutzt werden.
- Innerhalb des Radius: absolute Konvergenz. Außerhalb Divergenz.
- Auf dem Rand des Konvergenzradius: muss extra geprüft werden! Kann konvergieren, muss aber nicht.