Klausurvorbereitungskurs Analysis II Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

Tristan Alex (alex@mathematik.tu-darmstadt.de)
Miroslav Vržina (vrzina@mathematik.tu-darmstadt.de)

Um in der Klausur gut abzuschneiden, ist es notwendig (aber nicht hinreichend!), alle unten stehenden Punkte zu kennen und verstanden zu haben.

Totales Differential und partielle Differenzierbarkeit

- Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $x_0 \in \Omega$, wenn es eine lineare Abbildung $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine stetige Abbildung $r \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ gibt mit
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + \|h\| \cdot r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} r(h) = 0.$$
- Interpretation: Approximation der Funktion f durch lineare Abbildung A.
- Partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_j)-f(x_0)}{h}$ für $j = 1, \dots, n$.
- Satz 1: f total differenzierbar $\implies$ f partiell differenzierbar und f stetig.
- Satz 2: f stetig partiell differenzierbar $\implies$ f total differenzierbar. In diesem Fall wird die lineare Abbildung A bzgl. der Standardbasis durch die Jacobimatrix dargestellt.

Richtungsableitung und partielle Ableitung

- Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\partial_v f(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_j)-f(x_0)}{h}$ die Richtungsableitung von f in Richtung v im Punkt x_0.
- Must-know: Definition des Gradienten, Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs und Höhenlinien stehen senkrecht auf dem Gradienten.
- Rechenregeln und Sätze: Produktregel, Mittelwertsatz und Schrankensatz.

Lokale Extrema

- Gegeben $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Gesucht: lokale Extrema.
- Bestimme kritische Punkte des Gradienten von f $\rightsquigarrow$ Kandidaten für Extrema.
- Überprüfe, ob Hesse-Matrix in kritischen Punkten indefinit, positiv definit oder negativ definit ist $\rightsquigarrow$ Sattelpunkt, lokales Minimum oder lokales Maximum.
- Globale Extrema und Sonderfälle müssen gesondert betrachtet werden.