Klausurvorbereitung Analysis I
3. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Dipl.-Math. Tristan Alex
Dipl.-Math. Miroslav Vržina

SS 2011
10. August 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit per Definition)
Betrachte die beiden Funktionen

$$f:[0,1)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in(0,1)\\ 0 & x=0\end{cases}\qquad\text{und}\qquad g:[1,\infty)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{x}.$$

Zeige jeweils mit dem Folgenkriterium und mit dem ε-δ-Kriterium, dass f unstetig und g stetig sind.

Aufgabe G2 (Stetigkeit)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(a)

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{\sin^3(\cos(x^2)+x^7)}{x(9x^2+8)}$$

(b)

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}\frac{x^2-4x+5}{\frac{x-4}{2}(x-5)} & \text{falls } x<0\\ \frac{\sin x+\cos^3 x}{2} & \text{falls } x\geq 0\end{cases}$$

Aufgabe G3 (stetige Fortsetzbarkeit)
Ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $D(f)=(-9,\infty)\setminus\{0\}$ und

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{für}\quad x>0,\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x}} & \text{für}\quad x<0.\end{cases}$$

an der Stelle $x_0=0$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe G4 (Anwendung: Zwischenwertsatz)

(a) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeige, dass es ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt mit $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende Funktion. Sei außerdem $a > 0$. Zeige, dass $g(x) = f(x) + ax$ eine Nullstelle hat und dass diese eindeutig ist.

(c) Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x.$$

Zeige, daß die Graphen der beiden Funktionen sich schneiden.

Aufgabe G5 (Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Wie oft ist f differenzierbar? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe G6 (Anwendung: Mittelwertsatz)

Beweise die folgenden Ungleichungen:

(a) $e^x(y - x) < e^y - e^x < e^y(y - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|e^x \sin x - e^y \sin y| \leq e^{\frac{\pi}{2}} |x - y|$ für $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(c) $\tan x > x$ für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe G7 (Lipschitz und gleichmäßige Stetigkeit)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ ist für alle $x, y \in D$.

(a) Zeige, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeige, daß eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $\sup_{\xi \in I} |f'(\xi)| \leq M$ Lipschitz-stetig ist. Dabei ist $M \in \mathbb{R}$ irgendeine Konstante.

(c) Zeige, daß die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe G8 ((gleichmäßige) Stetigkeit)

Untersuche die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} \qquad\qquad g : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + x^2} \qquad\qquad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$
