

Klausurvorbereitung Analysis I

2. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Folgen und Reihen
Dipl.-Math. Tristan Alex
Dipl.-Math. Miroslav Vrzina

SS 2011
09. August 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwertsätze)

Überprüfen Sie, ob die unten stehenden Folgen konvergieren. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{5n^7 \left(1 + \frac{3}{n!}\right) (n^3 - n^2)}{(n^3 + 7)(n^5 + \sqrt{n+1})n^2} \quad b_n := \frac{\binom{3n}{2}}{\binom{n}{2}} \quad c_n := \frac{\sin(n)}{n} \quad d_n := \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \quad e_n := \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{bn}$$

Aufgabe G2 (Folgenkonvergenz durch Beschränktheit und Monotonie)

Sei $c > 0$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

- (a) Weisen Sie nach, daß die Folge durch $\sqrt{c} + 1$ beschränkt ist, und zeigen Sie hiermit die Konvergenz der Folge.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe G3 (Reihenkonvergenz)

Welche der folgenden Reihen konvergieren? Bestimmen Sie für die Reihen in der oberen Zeile im konvergenten Fall den Grenzwert.

$$\begin{array}{cccc} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{4^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{k^3 + 2k^2 + 5k - 1} & \sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi) k^{-\pi^2} & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \cdot q^n \text{ mit } |q| < 1 \end{array}$$