

Klausurvorbereitung Analysis I

1. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Vollständige Induktion und komplexe Zahlen
Dipl.-Math. Tristan Alex
Dipl.-Math. Miroslav Vrzina

SS 2011
08. August 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vollständige Induktion I)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass 8 ein Teiler von $(9^n - 1)$ ist.

Zur Erinnerung: Eine Zahl $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt Teiler von $b \in \mathbb{N}$, falls es $q \in \mathbb{N}$ mit $b = q \cdot a$ gibt.

Aufgabe G2 (Vollständige Induktion II)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \leq 2^n$? Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.

Aufgabe G3 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

- (a) Bestimmen Sie den euklidischen Abstand zwischen den Punkten $(4 + i)$ und $(-2 + 9i)$.
- (b) Zeichnen Sie die folgenden Punkte in der Gausschen Zahlenebene ein und geben Sie deren Polardarstellung an:

$$1 + i, \quad \sqrt{3} - i, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad (1 + \sqrt{3})^2, \quad \frac{(1-i)^3}{(1+i)^5}, \quad \sum_{k=1}^{17} i^k, \quad \frac{24 - 7i}{20 + 15i}.$$

- (c) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Gausschen Zahlenebene:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - i|\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |5 - z| < |z - 3i|\}.$$

- (d) Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\left| \frac{1+it}{1-it} \right| = 1$.