Klausurvorbereitungskurs Analysis I Vollständige Induktion und komplexe Zahlen

Tristan Alex (alex@mathematik.tu-darmstadt.de)
Miroslav Vržina (vrzina@mathematik.tu-darmstadt.de)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Um in der Klausur gut abzuschneiden, ist es notwendig (aber nicht hinreichend!), alle unten stehenden Punkte zu kennen und verstanden zu haben.

Prinzip der vollständigen Induktion

- Es liegt eine Aussage $A(n)$ vor, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder für alle $n \in \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq n_0\}$ für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$) als wahr vermutet wird.
- Ziel: Zeige, dass $M := \{n \in \mathbb{N} \colon A(n) \text{ ist wahr}\}$ mit $\mathbb{N}$ übereinstimmt.
- Induktionsanfang: Zeige $A(0)$ (bzw. $A(n_0)$) ist wahr.
- Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ (oder $n \geq n_0$) ist die Aussage $A(n)$ wahr.
- Induktionsschritt: Zeige, dass auch $A(n+1)$ eine wahre Aussage ist.

Komplexe Zahlen

- Addition: Die Summe von $z = a + ib$ und $w = c + id$ ist $z + w = (a + c) + i(b + d)$.
- Multiplikation: Das Produkt von $z = a + ib$ und $w = c + id$ lautet
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad).$$
- Betrag von $z = x + iy$ definiert durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ lässt sich in Polarform $re^{i\varphi}$ darstellen, wobei $r = |z|$ und φ der Winkel zwischen z und der reellen Achse ist.
- Interpretation der Multiplikation: Beträge werden multipliziert, Winkel addiert.
- Komplexe Konjugation: $\overline{z} = x - iy$.
- Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
- Für $z \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}.$$