Lineare Algebra 1
3. Exkurs
Alternativen zum Gauß-Verfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
Dirk Schröder

Fachbereich Mathematik
15. Dezember 2011

In diesem Exkurs soll das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ betrachtet werden. Die Lösung des Gleichungssystems sei mit x^* bezeichnet.

Aufgabe 1 Krylovräume

Definition: Der k-te Krylov-Raum zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\mathcal{K}_k(b,A) := \operatorname{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b\}.$$

Zeigen Sie, dass mit dieser Definition die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) *Die Vektoren $b, Ab, \dots, A^k b$ sind linear abhängig.*

b) *Es ist $\mathcal{K}_k(b,A) = \mathcal{K}_{k+1}(b,A)$.*

c) *Es gilt $A\mathcal{K}_k(b,A) \subseteq \mathcal{K}_k(b,A)$, d.h. $\mathcal{K}_k(b,A)$ ist ein A-invarianter Unterraum.*

d) *Es ist $x^* \in \mathcal{K}_k(b,A)$.*

Es bezeichne $x_0 \in \mathbb{R}$ einen beliebigen Vektor. Das Residuum r_0 ist dann definiert als $r_0 := b - Ax_0$. Zeigen Sie die wichtige Folgerung:

Ist $k \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit

$$\mathcal{K}_0(r_0,A) \subsetneq \mathcal{K}_1(r_0,A) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{K}_k(r_0,A) = \mathcal{K}_{k+1}(r_0,A) \quad (\textit{hierbei ist } \mathcal{K}_0(r_0,A) := \{0\}),$$

so liegt die Lösung x^* bereits in dem affinen Raum $x_0 + \mathcal{K}_k(r_0,A)$.

Aufgabe 2 GMRES

Jetzt sollen die Krylov-Räume genutzt werden um eine andere Methode zum Lösen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu finden. Dazu sei $||\cdot||$ die euklidische Vektornorm im $\mathbb{R}^n$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, d.h. invertierbare, Matrix. Dann wird durch

$$||x||_B := ||Bx|| \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

eine neue Vektornorm im $\mathbb{R}^n$ definiert. Für die Lösung x^* des Gleichungssystems gilt offensichtlich $||b - Ax^*||_B = 0$, anders gesagt verschwindet für die Lösung das Residuum. Offenbar ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ äquivalent zur Minimierung des Residuums

$$\text{minimiere } \frac{1}{2}||b - Ax||_B^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Optimierung über dem gesamten n-dimensionalen Raum kann sehr aufwendig sein. Die Idee der *Generalized Minimal RESiduum*-Verfahren, kurz *GMRES*-Verfahren, ist nur in Krylov-Räumen die Lösung zu suchen. Im k-ten Iterationsschritt wird nur das folgende k-dimensionale Optimierungsproblem betrachtet:

$$\text{minimiere } \frac{1}{2}||b - Ax||_B^2, \quad x \in x_0 + \mathscr{K}_k(r_0, A),$$

wobei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Startvektor ist und $r_0 := b - Ax_0$ das zugehörige Residuum.

Insgesamt ergibt sich also der folgende Algorithmus zum Lösen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$:

Algorithmus GMRES: Wähle einen Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und setze $r_0 := b - Ax_0$.

Für $k = 1, 2, \ldots$:

Bestimme $x_k \in \mathbb{R}^n$ als Lösung von
minimiere $\frac{1}{2}||b - Ax||_B^2, \quad x \in x_0 + \mathscr{K}_k(r_0, A)$.

Wieviele Iterationsschritte benötigt der Algorithmus maximal um die Lösung des linearen Gleichungssystems zu finden?

Wichtige Aspekte des Verfahrens sind die Wahl der Matrix B und die Lösungsmethode der Optimierungsprobleme. Für das konjugierte Gradientenverfahren, kurz *CG*-Verfahren, ist bspw. $B = A^{-\frac{1}{2}}$.

Literaturhinweis: Christian Kanzow - Numerik linearer Gleichungssystems, Springer (2004).