Linearen Algebra 1
2. Exkurs
Mehr als komplexe Zahlen

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
21. November 2011

Aufgabe 1 Quaternionen

Erinnern Sie sich an die Konstruktion der komplexen Zahlen: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden aus den reellen Zahlen konstruiert, indem man für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert:

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

und somit auf Paaren von reellen Zahlen eine neue Multiplikation einführt. Die Addition wir komponentenweise erklärt. Wir schreiben wie üblich $a + ib$ für das Paar $(a, b) \in \mathbb{C}$. Die reellen Zahlen fassen wir als Teilmenge der komplexen Zahlen auf, indem wir $a \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $(a, 0) = a + i \cdot 0$ identifizieren. Was passiert eigentlich, wenn man diese Konstruktion wiederholt, jetzt für komplexe Zahlen?

a) Wir definieren nun eine Multiplikation auf Paaren von komplexen Zahlen durch

$$(x, y) \cdot (z, w) := (xz - y\bar{w}, xw + y\bar{z})$$

für $x, y, z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass diese Multiplikation auf $\mathbb{C}^2$ assoziativ, aber nicht kommutativ ist. Zusammen mit komponentenweise definierter Addition erhalten wir den Ring der *Quaternionen* $\mathbb{H}$. Die komplexen Zahlen – und damit auch die reellen Zahlen – fassen wir wieder als Teilmenge von $\mathbb{H}$ auf, indem wir $x \in \mathbb{C}$ mit der Zahl $(x, 0) = x + 0j$ identifizieren.

b) Stellen Sie für die folgenden vier Elemente von $\mathbb{H}$ eine Multiplikationstabelle auf

$$1 := (1, 0), \quad \mathbf{i} := (i, 0), \quad \mathbf{j} := (0, 1), \quad \mathbf{k} := (0, i)$$

Für das Element $(x, y) \in \mathbb{H}$ mit $x, y \in \mathbb{C}$ schreiben wir auch $x + yj$.

c) Für $q = (x, y) \in \mathbb{H}$ definieren wir das *konjugierte Quaternion* durch

$$\bar{q} := (\bar{x}, -y).$$

Zeigen Sie: Es gilt $q\bar{q} = \bar{q}q \geq 0$ und $q\bar{q} = 0 \iff q = 0$.

d) Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ein Element $q^{-1} \in \mathbb{H}$ gibt, so dass $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

Was passiert, wenn wir die Konstruktion *nochmals* wiederholen, jetzt für Quaternionen?

e) Wir definieren durch
$$(p,q)\cdot(r,s) := (pr - \bar{s}q, sp + q\bar{r})$$
eine Multiplikation auf Paaren von Quaternionen. Die Menge der Paar von Quaternionen mit der komponentenweisen Addition und dieser Multiplikation heißt auch die Menge der *Oktaven* oder *Oktonionen*. Zeigen Sie, dass die so definierte Multiplikation nicht assoziativ ist. Welche der Eigenschaften der komplexen Zahlen bzw. der Quaternionen gelten auch für diese Multiplikation?

f) Was passiert, wenn Sie diese Konstruktion nochmals wiederhole? und nochmal, und nochmal ...

Aufgabe 2 Parakomplexe und Duale Zahlen

Sei c eine reelle Zahl und A_c der Ring, der aus $\mathbb{R}^2$ entsteht, indem man wie folgt eine Multiplikation definiert:
$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) := (x_1y_1 + c\cdot x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Zeigen Sie:

a) Der Ring A_c hat für alle $c \in \mathbb{R}$ ein Einselement.

b) Der Ring A_{-1} ist isomorph zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi\colon A_{-1} \to \mathbb{C}$, so dass für alle $z,w \in A_{-1}$ gilt: $\varphi(zw) = \varphi(z)\cdot\varphi(w)$ und $\varphi(z+w) = \varphi(z)+\varphi(w)$.

c) Die Ringe A_1 und A_0 haben Nullteiler, d.h. es gibt Elemente z,w mit $z\cdot w = 0$, aber $z \neq 0$ und $w \neq 0$.

d) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ is A_r isomorph zu einem der drei Ringe A_{-1}, A_0, oder A_1.

e) Der Ring A_1 is isomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Multiplikation; geben Sie dazu einen geeigneten Isomorphismus an.

Der Ring A_1 wird auch als *parakomplexe Zahlen*, A_0 auch als *duale Zahlen* bezeichnet. Man kann die Elemente dieser Ringe als $x_1 + x_2e$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $e^2 = 1$ bzw. $e^2 = 0$ darstellen.