Linearen Algebra 1
1. Exkurs
Vergleich von Mengen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
31. Oktober 2011

Die Exkurse zur Linearen Algebra 1 sind eine weiterführende Ergänzung zum Vorlesungsstoff. Der Stoff ist nicht relevant für die Klausur oder die weitere Vorlesung, sondern kann Ihnen als Anregung für eine tiefergehende Beschäftigung mit bestimmten Themen dienen. Dazu wird es gelegentlich notwendig sein, einen Blick in die Literatur zu werfen. Die gestellten Aufgaben sollen Ihnen Herausforderungen bieten und sind deshalb z.T. bewusst sehr schwer. Die Reihenfolge der Aufgaben auf dem Blatt richtet sich nach dem Inhalt. Sie sollten selbst entscheiden, wann Sie sich welcher Aufgabe widmen.

Mächtigkeit von Mengen

In diesem Exkurs wollen wir uns damit beschäftigen Mengen anhand ihrer Größe zu vergleichen. Das wird insbesondere dann interessant, wenn die Mengen nicht mehr endlich sind. Doch wie vergleicht man solche Mengen?

Definition: Zwei Mengen A und B heißen *gleich mächtig* oder haben *gleiche Mächtigkeit*, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $A \sim B$.

Zeigen Sie, dass die „Mächtigkeits-Relation“ [1]die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt:

a) Reflexivität: $A \sim A$.

b) Symmetrie: Ist $A \sim B$, so auch $B \sim A$.

c) Transitivität: Ist $A \sim B$ und $B \sim C$, so auch $A \sim C$.

Zeigen Sie, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ alle gleichmächtig sind.

Von dem deutschen Mathematiker *Georg Cantor* (1845 - 1918) gibt es mehrere schöne Beweise, dass $\mathbb{N}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind. In Büchern finden Sie bestimmt einige Hinweise dazu. Vollziehen Sie einen der Beweise nach.

Unendliche Mengen

Der Umgang mit dem Unendlichen stellt die Mathematik oft vor einige Herausforderungen. Was z.B. genau soll eine (un)endliche Menge sein? In der Mathematik heißt eine Menge A *unendlich*, falls es eine echte Teilmenge $B \subseteq A$ gibt, sodass B gleichmächtig zu A ist. Andernfalls heißt A endlich.

Geben Sie selbst mindestens 2 alternative Definitionen dafür an, wann eine Menge A unendlich ist. Sind Ihre Definitionen alle äquivalent?

Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ unendliche Mengen sind, aber dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ endlich ist.

[1] Im strengen Sinn der Vorlesung ist $\sim$ keine Relation.

Kleine und Große Mengen

Der letzte Abschnitt zeigt, dass es Mengen mit verschiedener Mächtigkeit gibt. Aber was ist größer $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$, und was heißt das überhaupt?

Zeigen Sie, dass für zwei Mengen A und B äquivalent sind:

a) Es gibt eine injektive Abbildung $i : A \to B$.

b) Es gibt eine surjektive Abbildung $p : B \to A$.

Hinweis: Für den Beweis müssen Sie vermutlich das sogenannte *Auswahlaxiom* verwenden. Ggf. müssen Sie sich in der Literatur darüber informieren. Aber vielleicht sind Sie ja auch der Typ Mathematiker, für den dieses Axiom selbstverständlich ist. Finden Sie es selbst heraus.

Definition: Seien A und B Mengen. Wir sagen, dass B *mächtiger* ist als A oder dass B eine *größere Mächtigkeit* als A hat, falls es eine injektive Abbildung $i : A \to B$ gibt. Wir schreiben hierfür $A \preceq B$.

Nach dieser Definition ist klar, dass jede Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ kleiner ist als $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ kleiner ist als $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jede beliebige Menge A die Potenzmenge $\mathscr{P}(A)$ mächtiger ist als A. Gibt es eine Menge A, die gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge ist. Wie genau (mächtiger/gleichmächtig?) stehen die folgenden Mengen zueinander?

$$\mathbb{N}\,, \qquad \mathbb{N}\times\mathbb{N}\,, \qquad [0,1]\,, \qquad [0,1]\times[0,1]\,, \qquad \mathbb{R}\,, \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R}\,, \qquad \mathscr{P}(\mathbb{N})\,, \qquad \mathscr{P}(\mathbb{R})\,,$$

wobei $[0,1]$ die Menge aller reellen Zahlen x mit $0 \leq x \leq 1$ bezeichnet.

Eine interessante Frage aus der Mengentheorie ist, ob es Mengen A mit $\mathbb{N} \preceq A \preceq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ gibt, die nicht zu $\mathbb{N}$ oder $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind (Kontinuumshypothese). Ich bin fest davon überzeugt, dass Sie es weder schaffen werden, eine solche Menge zu konstruieren, noch werden Sie es schaffen, zu beweisen, dass es keine solche Menge gibt. Wie komme ich zu dieser Überzeugung?

Zeigen Sie, dass $\preceq$ „modulo Gleichmächtigkeit“die Eigenschaften einer Ordnungrelation erfüllt:

a) Faktorisierung: Ist $A \sim A'$, $B \sim B'$ und $A \preceq B$, so auch $A' \preceq B'$.

b) Reflexivität: $A \preceq A$.

c) Antisymmetrie: Ist $A \preceq B$ und $B \preceq A$, so gilt $A \sim B$.

d) Transitivität: Ist $A \preceq B$ und $B \preceq C$, so ist $A \preceq C$.

Hinweis: Der Beweis der Antisymmetrie ist recht schwer. Sie sollten ggf. den Satz von Cantor-Bernstein-Schröder in der Literatur nachsehen und den Beweis nachvollziehen.