Klausur „Lineare Algebra I“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross

WS 2010/11
19. März 2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	12	10	8	10	10	60	
erreichte Punktzahl								

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (Bild und Kern) (10 Punkte)

Sei eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine reelle Matrix A an, so dass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt. **1P.**

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes und des Kernes von φ. **6P.**

(c) Entscheiden Sie, ob der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Bild von φ liegt. **3P.**

Lösung:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)&(c) Im Hinblick auf Teilaufgabe (c) führt man den Gaußalgorithmus zweckmäßigerweise gleich für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der in (c) gegebenen rechten Seite durch. Man erhält:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{18} \end{array}\right)$$

Der Vektor $(1,1,1,1)^t$ ist also nicht im Bild von φ enthalten. Die Matrix A hat den Rang 3, der Kern ist somit eindimensional; da $(0,0,0,1)^t$ im Kern liegt, bildet dieser Vektor eine Basis des Kernes. Das Bild von φ ist dreidimensional, eine Basis des Bildes ist somit z.B. durch die ersten drei Spalten von A gegeben. Diese spannen das Bild bereits auf (denn die vierte Spalte von A ist Null).

Natürlich kann man Aufgabenteil (b) und (c) auch seperat bearbeiten.
Man kann die Basis des Bildes und des Kerns auch auf andere Weise einzeln berechnen. Es muss aber immer gezeigt werden, dass es sich im eine Basis handelt.
Bei Aufgabe (b) soll es je 3 Punkte auf die Basis des Bildes und die Basis des Kerns geben. Davon gibt es je nur einen, wenn die Basis nur angegeben wird.

2. Aufgabe (Surjektivität und Injektivität) (12 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden reellen $m \times n$-Matrizen.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(e)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie für jede dieser Matrizen A jeweils, ob die durch A gegebene lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ injektiv ist und ob sie surjektiv ist.
Geben Sie jeweils den Rang der Matrix A an.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix der Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

Lösung:

(a) Offensichtlich sind die beiden Spalten der Matrix keine Vielfachen voneinander, damit sind sie linear unabhängig und die Matrix hat Rang 2. Aus der Dimensionsformel folgt, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Die Matrix ist invertierbar. Dies folgt durch Anwenden des Gauß-Algorithmus, mit dem man auch die Inverse berechnet. Es ergibt sich

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 5/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat somit Rang 3 und φ ist injektiv und surjektiv.

(c) Die 2×2-Nullmatrix hat Rang 0, φ ist weder injektiv noch surjektiv.

(d) Anwenden des Gaußalgorithmus zeigt nach wenigen Schritten, dass der Rang der Matrix gleich zwei ist. Die Abbildung φ ist somit weder injektiv noch surjektiv.

(e) Diese Matrix ist ihre eigene Inverse. Der Rang ist zwei, φ ist somit injektiv und surjektiv.

(f) Diese Matrix liegt bereits in Stufenform vor und es ist sofort ersichtlich, dass der Rang gleich drei ist. Damit ist φ surjektiv, aber (nach der Dimensionsformel) nicht injektiv.

Auf jeden Aufgabenteil soll es 2 Punkte geben. Davon einen auf Injektivität/Surjektivität und einen auf Rang/Umkehrabbildung. Für die volle Punktzahl müssen alle Ergebnisse bewiesen werden. Für die richtige Angabe der Injektivität, Surjektivität, Rang und gegebenenfalls Umkehrabbildung ohne Begründung gibt es einen Punkt.

3. Aufgabe (Untervektorraum und Matrix einer linearen Abbildung) (10 Punkte)

Sei U die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^4$.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist. **2P.**

(b) Zeigen Sie, dass

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von U ist. **2P.**

(c) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix},$$

sowie die angeordnete Basis

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi|_U]^B_C$ der linearen Abbildung $\varphi|_U : U \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen B von U und C von $\mathbb{R}^2$. **6P.**

Lösung:

(a) Die Unterraumeigenschaft ergibt sich sofort daraus, dass die Menge U als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem auf dem $\mathbb{R}^4$ gegeben ist. (Alternativ kann man auch die Axiome für einen Untervektorraum einzeln problemlos nachprüfen.)

(b) Da U der Kern der surjektiven linearen Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

ist, ist U nach der Dimensionsformel dreidimensional. Es genügt also, festzustellen, dass B linear unabhängig ist, z.B. durch den Gaußalgorithmus wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Um die Matrix zu bestimmen, setzen wir die Vektoren von B in φ ein. Wir erhalten

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die Bilder der Basisvektoren bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Die Basis C unterscheidet sich nur durch Vertauschung der beiden Koordinaten und wir erhalten somit ohne weitere Rechnung

$$[\varphi|_U]_C^B=\begin{pmatrix}3&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Im Aufgabenteil (c) kann man 3 der 6 Punkte dafür geben, dass die Bildwerte der Basisvektoren bestimmt werden. Den Rest der Punkte gibt es dann auf das richtige Einfügen in die Matrix.

4. Aufgabe (Determinante und Permutation) (8 Punkte)

Berechnen Sie:

(a) Die Determinante der reellen Matrix

$$A=\begin{pmatrix}69&153&17\\5&1024&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

4P.

(b) Die Anzahl der Fehlstände oder Inversionen der Permutation

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&4&5&7&6&1&3\end{pmatrix}\in S_8.$$

Bestimmen Sie auch das Vorzeichen der Permutation $\operatorname{sgn}(\sigma)$. **4P.**

Lösung:

(a) Durch Entwickeln nach der letzten Zeile erhält man

$$\det A=(-1)(69\cdot 1-5\cdot 17)=16.$$

(b) Die Inversionen sind

$$(1,7),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(3,7),$$
$$(3,8),(4,7),(4,8),(5,6),(5,7),(5,8),(6,7),(6,8).$$

Dies sind 16 Inversionen und somit gilt $\operatorname{sgn}(\sigma)=+1$.

5. Aufgabe (Untervektorräume) (10 Punkte)

Seien e_1,e_2,e_3 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$.

$$U_1=\operatorname{span}(e_1+e_2),\quad U_2=\operatorname{span}(e_1,e_2),\quad U_3=\operatorname{span}(e_1+e_3).$$

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

(a) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

(b) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$.

(c) $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

(d) $U_1 + U_3 = U_1 \oplus U_3$.

Lösung:

(a) Die Aussage gilt, denn U_1 und U_3 sind zwei verschiedene eindimensionale Unterräume von $\mathbb{R}^3$, die sich nur in der Null schneiden. Es gilt also bereits $U_1 \cap U_3 = \{0\}$.

(b) Dies gilt, da U_2 ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist und $e_1+e_3 \notin U_2$. Somit gilt bereits $\mathbb{R}^3 = U_2+U_3$.

(c) Da z.B. der Vektor $e_1 + e_2$ sowohl in U_1 als auch in U_2 enthalten ist, ist die Summe nicht direkt, die Aussage trifft also nicht zu.

(d) Die Aussage ist wahr. Zum Beweis genügt es, zu bemerken, dass $U_1 \cap U_3 = \{0\}$ gilt, siehe (a).

Es gibt bei allen vier Aufgabenteilen auch alternative Lösungen. Wichtig ist, dass die Behauptung wirklich gezeigt wird. Auf die Aufgabenteile (a) und (b) gibt es je 2 Punkte, auf die Aufgabenteile (c) und (d) 3 Punkte. Davon gibt es je einen Punkt dafür, dass erkannt wird, ob die Aussagen richtig oder falsch sind und den Rest auf den Beweis.

6. Aufgabe (Beweise) (10 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und seien $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass aus $\varphi \circ \psi = 0$ folgt, dass

$$\mathrm{rank}(\varphi) + \mathrm{rank}(\psi) \leq \dim V$$

gilt. **5P.**

(b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume, so dass $V = U_1 + U_2$ gilt. Sei $W = U_1 \cap U_2$. Zeigen Sie, dass V/W zu dem direkten Produkt

$$(U_1/W) \times (U_2/W)$$

isomorph ist. **5P.**

Lösung:

(a) Angenommen, es gilt $\mathrm{rank}(\varphi) + \mathrm{rank}(\psi) > \dim V$. Dann folgt mit der Dimensionsformel, auf die Abbildung φ angewendet, dass $\dim(\mathrm{im}(\psi)) > \dim(\ker(\varphi))$ gilt, was $\mathrm{im}(\psi) \subseteq \ker(\varphi)$ widerspricht.

Der Beweis kann auch direkt geführt werden.

Auf die wesentliche Erkenntnis, dass $\mathrm{im}(\psi) \subseteq \ker(\varphi)$ gilt, gibt es zwei Punkte. Ein Weiterer wird auf die daraus folgende Ungleichung der Dimensionen vergeben und die restlichen zwei auf das richtige Anwenden der Dimensionsformel, welches zum Beweis führt.

(b) Wir zeigen, dass durch $\varphi\colon (U_1/W) \times (U_2/W) \to V/W, (u_1+W, u_2+W) \mapsto u_1+u_2+W$ ein wohldefinierter linearer Isomorphismus gegeben ist.

i. Wohldefiniert: Seien $u_1, u_1' \in U_1$ und $u_2, u_2' \in U_2$ mit $u_1 - u_1' \in W$ und $u_2 - u_2' \in W$. Dann gilt $u_1 + u_2 + W = u_1' + u_2' + W$.

ii. Linearität: Es gilt $\varphi(\lambda u_1 + \mu v_1 + W, \lambda u_2 + \mu v_2 + W) = \lambda u_1 + \mu v_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 + W = \lambda\varphi(u_1 + W, u_2 + W) + \mu\varphi(v_1 + W, v_2 + W)$.

iii. Injektivität: Sei $(u_1 + W, u_2 + W) \in \ker(\varphi)$, d.h. $u_1 + u_2 \in W = U_1 \cap U_2$. Daraus folgt, dass $u_1 \in W$ und $u_2 \in W$.

iv. Surjektivität: Da $V = U_1 + U_2$, gibt es zu jedem $v \in V$ ein $u_1 \in U_1$ und ein $u_2 \in U_2$, so dass $v = u_1 + u_2$. Dies zeigt, dass jeder Vektor $v + W \in V/W$ im Bild von φ liegt.

Bei dieser Aufgabe soll es einen Punkt auf die richtige Angabe des Isomorphismus und je einen Punkt auf den Beweis der Wohldefiniertheit, der Linearität der Injektivität und der Surjektivität geben.

Man beachte, dass man für die Injektivität die Voraussetzung $W = U_1 \cap U_2$ und für die Surjektivität die Voraussetzung $V = U_1 + U_2$ benötigt. Ist dies in den Beweisen nicht erwähnt, so sind sie auf keinen Fall komplett richtig.