# Klausur „Lineare Algebra I“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Kollross**

**WS 2010/11**
**19. März 2011**

Name: ..............................................

Vorname: ..............................................

Matrikelnummer: ......................................

Studiengang: ..........................................

Semester: ..............................................

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 10 | 12 | 10 | 8 | 10 | 10 | 60 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

**Bitte beachten Sie:** Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

**Tipp:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

## Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

## 1. Aufgabe (Bild und Kern) (10 Punkte)

Sei eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine reelle Matrix $A$ an, so dass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt. **1P.**

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes und des Kernes von $\varphi$. **6P.**

(c) Entscheiden Sie, ob der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Bild von $\varphi$ liegt. **3P.**

## 2. Aufgabe (Surjektivität und Injektivität) (12 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden reellen $m \times n$-Matrizen.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie für jede dieser Matrizen $A$ jeweils, ob die durch $A$ gegebene lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ injektiv ist und ob sie surjektiv ist.
Geben Sie jeweils den Rang der Matrix $A$ an.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix der Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

## 3. Aufgabe (Untervektorraum und Matrix einer linearen Abbildung) (10 Punkte)

Sei $U$ die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^4$.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $U$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist. **2P.**

(b) Zeigen Sie, dass

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $U$ ist. **2P.**

(c) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix},$$

sowie die angeordnete Basis

$$C = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi|_U]^B_C$ der linearen Abbildung $\varphi|_U : U \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen $B$ von $U$ und $C$ von $\mathbb{R}^2$. **6P.**

## 4. Aufgabe (Determinante und Permutation) (8 Punkte)

Berechnen Sie:

(a) Die Determinante der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 69 & 153 & 17 \\ 5 & 1024 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4P.**

(b) Die Anzahl der Fehlstände oder Inversionen der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Bestimmen Sie auch das Vorzeichen der Permutation $\operatorname{sgn}(\sigma)$. **4P.**

## 5. Aufgabe (Untervektorräume) (10 Punkte)

Seien $e_1, e_2, e_3$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$.

$$U_1 = \operatorname{span}(e_1 + e_2), \quad U_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2), \quad U_3 = \operatorname{span}(e_1 + e_3).$$

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

(a) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

(b) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$.

(c) $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

(d) $U_1 + U_3 = U_1 \oplus U_3$.

## 6. Aufgabe (Beweise) (10 Punkte)

(a) Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und seien $\varphi, \psi \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass aus $\varphi \circ \psi = 0$ folgt, dass

$$\operatorname{rank}(\varphi) + \operatorname{rank}(\psi) \leq \dim V$$

gilt. **5P.**

(b) Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume, so dass $V = U_1 + U_2$ gilt. Sei $W = U_1 \cap U_2$. Zeigen Sie, dass $V/W$ zu dem direkten Produkt

$$(U_1/W) \times (U_2/W)$$

isomorph ist. **5P.**