Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
28./29.1.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 66 – Minitest:

Lösen Sie schnell, ohne in Ihren Unterlagen nachzuschauen, folgende Aufgaben:

a) Wie und in welchen Dreiecken ist die Euler'sche Gerade definiert?

b) Geben Sie den Radius des Umkreises eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c an.

Aufgabe 67 – Kreuzprodukt:

Gegeben seien zwei Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt wird definiert durch

$$x \times y :\, = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Kreuzprodukts

a) $x \times y$ ist orthogonal zu x und y. Machen Sie sich klar, dass für x, y und $x \times y$ die Rechte-Hand-Regel gilt.

b) Bilinearität und Antisymmetrie.

c) Die Graßmann-Identität

$$x \times (y \times z) = y(x \cdot z) - z(x \cdot y).$$

d) Die Jacobi-Identität

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

e) Die Lagrange-Identität

$$(x \times y) \cdot (z \times w) = (x \cdot z)(y \cdot w) - (y \cdot z)(x \cdot w).$$

f) Folgern Sie aus der Lagrange-Identität, dass $x \times y = 0$ genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

g) $|x \times y|$ gibt den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms an.

h) Das Spatprodukt ist durch $\langle x, y, z\rangle := (x \times y) \cdot z$ definiert. Zeigen Sie, dass

1. es unter zyklischer Vertauschung invariant ist,
2. $\langle x, y, z\rangle = \det(x, y, z)$ gilt und
3. $\langle x, y, z\rangle$ das Volumen des von x, y und z aufgespannten Parallelepipeds angibt.

Aufgabe 68 – Quadratische Gleichungen: Zeigen Sie, dass der Graph einer quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + bx + f = 0$$

($A \in M_2(\mathbb{R})$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^2$, $f \in \mathbb{R}$) entweder ein Kegelschnitt oder die leere Menge ist. Bringen Sie dafür die Gleichung in eine der Normalformen

1. Normalform für eine Hyperbel oder nicht-leere Ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + s\frac{y^2}{b^2} = t,$$
wobei
$$s = \begin{cases} 1 & \text{(Ellipse)} \\ -1 & \text{(Hyperbel)} \end{cases} \quad \text{und} \quad t = \begin{cases} 1 & \text{(glatt)} \\ 0 & \text{(ausgeartet).} \end{cases}$$
2. Normalform einer leeren Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.
3. Normalform einer Parabel
$$y^2 = 4cx$$
wobei
$$c = \begin{cases} \text{eine positive Konstante} & \text{(glatt)} \\ 0 & \text{(ausgeartet).} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der linearen Algebra, dass die gemischten Terme eliminiert werden können.

b) Formen Sie die Gleichung so um, dass keine Terme erster Ordnung mehr vorkommen.

Hausaufgabe 69 – Entfernungen (4 Punkte):

a) Bestimmen Sie die Entfernungen zwischen Darmstadt und den Städten Berlin, London, Washington, Moskau und Canberra. (Erdradius 6371 km)

Darmstadt	49°52' n. Br.	8°39' ö. L.
Berlin	52°32' n. Br.	13°25' ö. L.
London	51°30' n. Br.	0°10' ö. L.
Washington	38°55' n. Br.	77°00' w. L.
Moskau	55°45' n. Br.	37°42' ö. L.
Canberra	35°18' s. Br.	149°08' ö. L.

b) Berechnen Sie Innenwinkel und Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten Darmstadt, Berlin und London. Vergleichen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks mit dem der ganzen Erdoberfläche.

c) In welche Himmelsrichtung fliegt ein Flugzeug von Darmstadt nach Canberra nach dem Start, wenn es auf einer Geodätischen fliegt?

Hausaufgabe 70 – Winkelsumme auf Flächen (4 Punkte):

Die charakteristische Größe von Kegeln und gewellten Flächen ist der Umfangswinkel. Bei einem Kegel, den Sie aus einem Halbkreis verkleben, ist der Umfangswinkel π; bei einer gewellten Fläche aus Vollkreis und Viertelkreis $\frac{5}{2}\pi$.
Leiten Sie eine Formel für die Innenwinkelsumme eines beliebigen geodätischen Dreiecks, das die Spitze/Stumpfe enthält, in Abhängigkeit vom Umfangswinkel her. Stellen Sie die Flächen aus Papier her.

a) Betrachten Sie zuerst einen Kegel.

b) Betrachten Sie eine gewellte Fläche aus Vollkreis und Kreisbogen mit Winkel $\alpha < \pi$.

c) Überlegen Sie insbesondere, was passiert, wenn Sie einen Kreis mit einem Dreiviertelkreis zu einer gewellten Fläche verkleben.