Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
21./22.01.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 61 – Selbstüberprüfung:

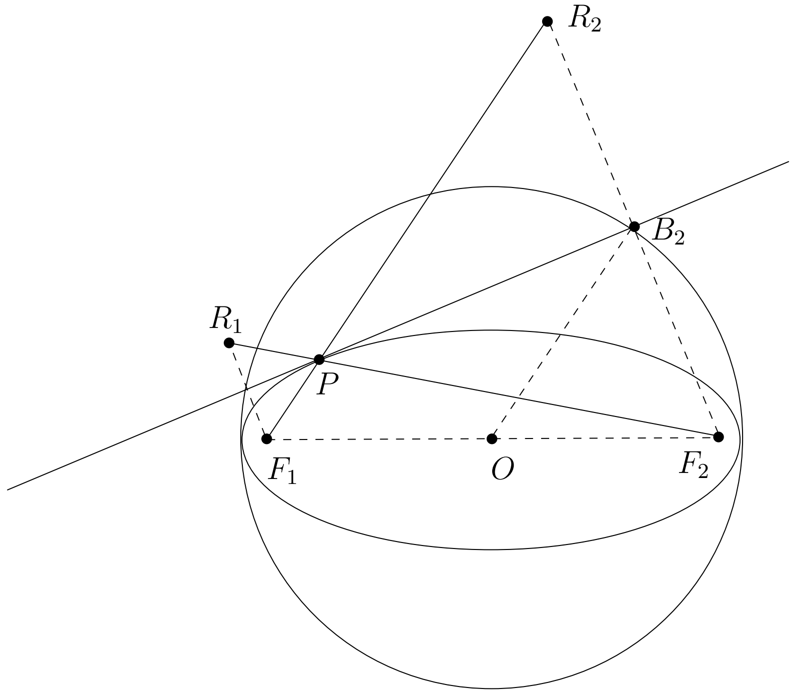
Lösen Sie schnell ohne in Ihren Unterlagen nachzuschauen folgende Aufgaben:

a) Was besagt der Tangentensatz?

b) Geben Sie eine Parametrisierung des Kreises vom Radius 5 um den Punkt (1, 2) an.

Aufgabe 62 – Hauptkreis der Ellipse:

Als Hauptkreis einer Ellipse mit großer Halbachse a bezeichnet man den Kreis von Durchmesser $2a$ um den Ursprung. Beweisen Sie anhand der gegebenen Skizze ohne explizites Berechnen der Fußpunkte:
Der Fußpunkt des Lotes durch einen Brennpunkt auf eine Ellipsentangente liegt auf dem Hauptkreis der Ellipse.
Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass alle Reflektionspunkte R_2 des Brennpunktes F_2 an Ellipsentangenten auf einem Kreis vom Radius $2a$ um den Brennpunkt F_1 liegen.



Aufgabe 63 – Polare:

Von einem Punkt P außerhalb der Ellipse kann man zwei Tangenten an die Ellipse legen. Die Verbindungsgerade p der Berührpunkte nennt man Polare zum Pol P bezüglich der Ellipse.

a) Skizzieren Sie Ellipse, Pol und dazugehörige Polare.

b) Bestimmen Sie zu gegebenem Pol $P = (p_1,\ p_2)$ die Gleichung der Polaren.

c) Zeigen Sie: Sei p die Polare zum Pol P und liege Q auf p, dann geht die Polare zum Pol Q durch P.

Aufgabe 64 – Hyperbeltangente:

Zeigen Sie, dass folgender Satz gilt:
Sei T eine Hyperbeltangente im Punkt $P = (x_0, y_0)$ und seien P_1, P_2 die Schnittpunkte von T mit den Asymptotengeraden der Hyperbel, dann liegt P in der Mitte der Strecke von P_1 nach P_2.

Hausaufgabe 65 – Mittelpunkte Geradenschar (4 Punkte):

Zeigen Sie:
Wird eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 < b < a$$

von einer Parallelenschar mit der Steigung m_1 geschnitten, dann liegen die Mittelpunkte der ausgeschnittenen Ellipsensehnen auf einer Ursprungsgeraden mit der Steigung m_2, wobei

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

gilt.

Hausaufgabe 66 – Hyperboloid (4 Punkte):

Durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

wird ein Hyperboloid beschrieben.

a) Um was für Kurven handelt es sich es bei den Schnitten eines Hyperboloiden mit den Koordinatenebenen?

b) Obwohl das Hyperboloid eine gekrümmte Fläche ist, enthält es doch unendlich viele Geraden. Zeigen Sie, dass die Geraden

$$g_{1,2} : x = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \\ c \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

$$h_{1,2} : x = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \pm c \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

auf dem Hyperboloid liegen.

c) Leiten Sie von einer der vier Geradengleichungen ausgehend eine Gleichung für eine Geradenschar her, die im Hyperboloid enthalten ist.