Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
14./15.1.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 56 – Polarengleichung:

Zeigen Sie, dass die Kegelschnitte in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi}$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet ε die nummerische Exzentrizität des Kegelschnitts und p dessen Parameter.

Hinweis: Legen Sie den Pol in einen Brennpunkt und definieren Sie sich $p > 0$ durch den Schnittpunkt des Kegelschnitts mit der y-Achse.

Aufgabe 57 – Dandelinsche Kugeln:

Ein gerader Kreiskegel mit dem halben Öffnungswinkel φ werde von einer Ebene E so geschnitten, dass eine Ellipse entsteht. Der Winkel zwischen der Ebene und der Kegelachse sei α, die Kegelachse werde in der Entfernung d von der Spitze geschnitten.
Es gibt genau zwei Kugeln, die sowohl die Ebene als auch den Kegel von innen berühren, sie heißen *dandelinsche Kugeln*.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.
b) Berechnen Sie die Radien r_1 und r_2 der beiden dandelinschen Kugeln.
c) In welchen Punkten berühren die Kugeln die Ebene E?

Aufgabe 58 – LORAN Navigation:

Ein Öltanker, der auf dem Weg nach Carson Bay ist, empfängt im dichten Nebel Funksignale, die von drei Radiostationen F_1, F_2, F_3 gleichzeitig gesendet wurden. Die Radiostationen liegen auf einer Gerade, wobei F_2 in der Mitte liegt (siehe Skizze). Das Schiff erhält das Signal von F_1 $7{,}22 \cdot 10^{-6}$ sec. später als das Signal von F_2 und das Signal von F_3 $6{,}3 \cdot 10^{-6}$ sec. später als das Signal von F_2. Wo ist das Schiff und in welche Richtung sollte der Steuermann das Schiff steuern, um eine Havarie zu vermeiden?

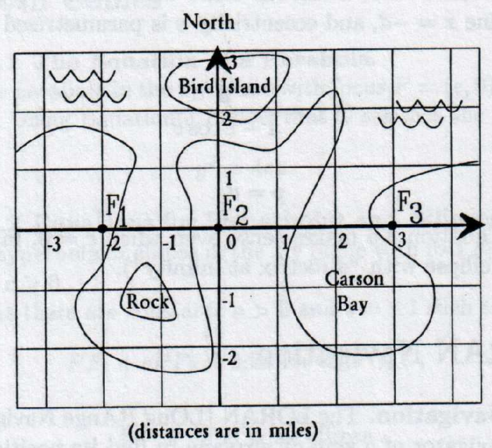

FIGURE 3.22. Carson Bay and vicinity.

Hinweis: Die Differenz der Entfernungen von einem Schiff im Punkt P zu F_1 und F_2 beträgt

$$|PF_2| - |PF_1| = c\Delta t,$$

wobei $c = 186000\frac{\text{mi}}{\text{sec}}$ die Lichtgeschwindigkeit und $\Delta t = t_2 - t_1$ die Zeitdifferenz der ankommenden Signale von F_1 und F_2 ist.

Hausaufgabe 59 – Parabel (4 Punkte):

a) Zeigen Sie, dass ein beliebiger Punkt der Parabel, die durch $y^2 = 4ax$, $a > 0$ beschrieben wird, durch $(x, y) = (at^2, 2at)$ ausgedrückt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in diesem Punkt.

c) Zeigen Sie, dass sich die zwei Tangenten zu den Parametern t_1 und t_2 im Punkt $(at_1t_2, a(t_1 + t_2))$ schneiden.

d) Betrachten Sie das Dreieck, dass durch die Schnittpunkte dreier Tangenten entsteht. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Höhen auf der Brenngeraden liegt.

e) *Zusatz*: Zeigen Sie, dass der Umkreis des Dreiecks durch den Brennpunkt geht.

Hausaufgabe 60 – Hyperbel (4 Punkte):

Beweisen Sie, dass der Lotfußpunkt eines Hyperbelbrennpunkts auf eine Tangente auf dem Kreis um den Mittelpunkt der Hyperbel mit dem Radius a (Halbachse) liegt.