Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
10./11.12.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 45 – Gebrochen lineare Funktionen:

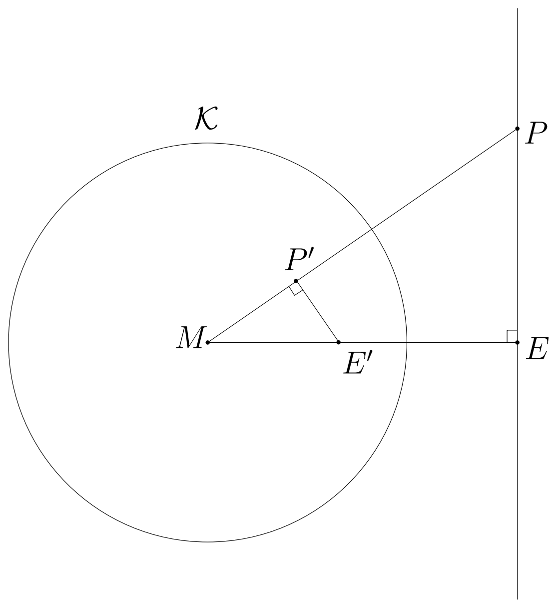
Durch $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ sei die gebrochen lineare Funktion $L_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ definiert. Zeigen Sie, dass

a) $L_M = \mathrm{Id} \Leftrightarrow M = aI$ mit $a \in \mathbb{C}^*$,

b) $L_M \circ L_N = L_{MN}$ für alle $M, N \in GL_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 46 – Spiegelung am Kreis:

Wir betrachten die Spiegelung an einem Kreis $\mathcal{K}$ mit Mittelpunkt M. Zeigen Sie, dass jede Gerade, die nicht durch M geht, auf einen Kreis durch M abgebildet wird.
Skizze zur Beweisidee:



Aufgabe 47 – Zueinander orthogonale Kreise I:

Die Kreise $\mathcal{K}(Z_1, r_1)$ und $\mathcal{K}(Z_2, r_2)$ mit den Zentren Z_1, Z_2 und den Radien r_1, r_2 schneiden sich genau dann orthogonal, falls $r_1^2 + r_2^2 = |Z_1Z_2|^2$ gilt.

Aufgabe 48 – Verkettung zweier Kreisspiegelungen:

Die Verkettung zweier Kreisspiegelungen mit gleichem Zentrum ist eine zentrische Streckung. Zeigen Sie, dass obige Aussage stimmt und berechnen Sie den Streckfaktor.

Hausaufgabe 49 – Zueinander orthogonale Kreise II (4 Punkte):

Jeder Kreis $\mathcal{K}'$, der einen gegebenen Kreis $\mathcal{K}$ orthogonal schneidet, geht bei Spiegelung an $\mathcal{K}$ in sich selbst über.

Hausaufgabe 50 – Spiegelung am Inkreis (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

a) Die Bilder der Verlängerungen der Seiten eines Dreiecks $\Delta(ABC)$ unter der Spiegelung an dessen Inkreis K sind drei Kreise gleicher Größe. Diese schneiden sich im Inkreismittelpunkt I.

b) Das Bild des Umkreises unter derselben Inversion, ist ebenfalls ein Kreis der gleichen Größe.

Hinweise:
Nutzen Sie für a) Ihre Ergebnisse aus den Aufgaben. Um b) zu zeigen beweisen Sie Folgendes:
Schneiden sich drei Kreise von gleichem Radius in einem Punkt, so hat der Kreis durch die verbleibenden drei Schnittpunkte den gleichen Radius.