Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
12./13.11.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 23 – Sinussatz:

Beweisen Sie folgende Aussage:
Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, α,β und γ die jeweils gegenüber liegenden Winkel, dann gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Aufgabe 24 – Rechtecke mit einer rationalen Kante:

Unter einem Rechteck verstehen wir eine Menge der Form

$$[a, b] \times [c, d], \ \ a < b, \ c < d$$

Wir nennen $b - a$ die Breite und $d - c$ die Höhe dieses Rechtecks.
Gegeben sei eine endliche Menge M von Rechtecken mit folgender Eigenschaft:

1. Verschiedene Rechtecke aus M haben höchstens Randpunkte gemeinsam.
2. Für Rechtecke aus M können Höhe und Breite nicht beide irrational sein.
3. Die Vereinigung aller Rechtecke aus M ist ebenfalls ein Rechteck R.

Beweisen Sie die Behauptung: Die Höhe oder Breite von R ist rational.
Tipp: Betrachten Sie das Integral $\int_R e^{2\pi i(x-y)}dxdy$.

Aufgabe 25 – Pythagoreische Tripel:

Die Fibonacci-Folge $(f_k)_k \in \mathbb{N}_0$, benannt nach *Leonardo Fibonacci (12.-13. Jhd.)*, ist durch das rekursive Bildungsgesetz

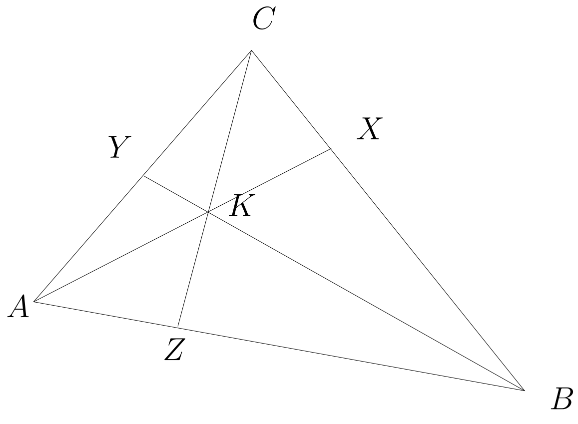
$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \text{ für } k \geq 2$$

mit den Anfangswerten $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ definiert. Zeigen Sie:
Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(f_n f_{n+3}, \ 2f_{n+1}f_{n+2}, \ f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)$$

ein pythagoreisches Tripel.

Aufgabe 26 – Satz von Euler-Gergonne:



Zu Zeigen:
Für die Teilungsverhältnisse

$$u = \frac{|AK|}{|KX|}, \ v = \frac{|BK|}{|KY|}, \ w = \frac{|CK|}{|KZ|}$$

dreier sich im Punkt K schneidender Ecktransversalen des Dreiecks ABC gilt:

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1$$

Aufgabe 27 – Neper'sche Gleichungen:

Beweisen Sie die Neper'schen Gleichungen des euklidischen Dreiecks

$$(b+c)\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = (b-c)\tan\frac{\beta+\gamma}{2}$$

Zwei weitere Gleichungen entstehen durch zyklische Vertauschung.

Hausaufgabe 28 – Existenz von Lösungstripeln (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^4$$

unendlich viele Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ besitzt.

Hausaufgabe 29 – Länge der Seitenhalbierenden (4 Punkte):

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B, C. Es sei M_a der Mittelpunkt der Seite a. Beweisen Sie folgende Formel für die Länge der Seitenhalbierenden von a:

$$|AM_a|^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$$