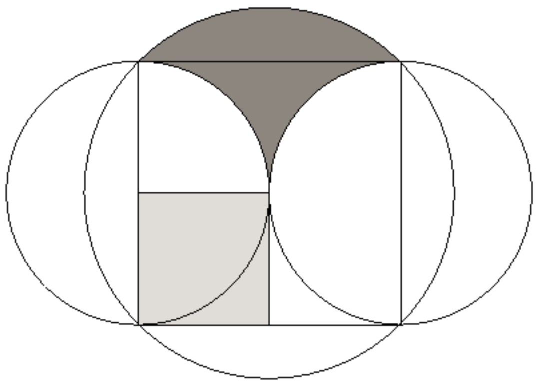
Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
5./6.11.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 18 – Flächen nach Leonardo da Vinci:

Beweisen Sie, dass die beiden in der Figur markierten Flächenstücke den gleichen Inhalt haben.



Aufgabe 19 – Stereographische Projektion:

Die 2-Sphäre ist gegeben durch

$$\mathbb{S}^2 :\ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Der Nordpol sei $N :\ = (0, 0, 1)$. Die folgende Abbildung heißt *stereographische Projektion*

$$\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right).$$

a) Fertigen Sie eine passende Skizze an.
b) Sei g_x die Gerade durch $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und den Nordpol N. Zeigen Sie, dass der Punkt $(\pi(x), 0)$ der Schnittpunkt der Äquatorebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mit der Gerade g_x ist.
c) Zeigen Sie, dass die Projektion π bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrfunktion an.

Aufgabe 20 – Mollweidsche Gleichungen:

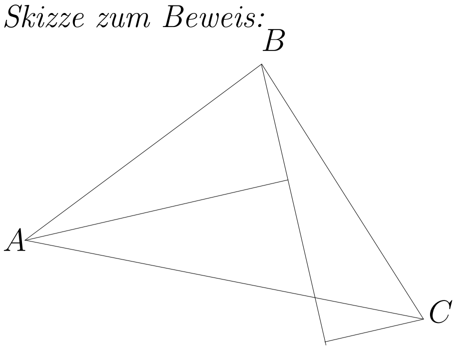
Beweisen Sie die Mollweidschen Gleichungen des euklidschen Dreiecks

$$(b - c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \tag{4.1}$$

$$(b + c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \tag{4.2}$$

Vier weitere Gleichungen entstehen durch zyklische Vertauschung.

Skizze zum Beweis:



Aufgabe 21 – Einheitswurzeln:

Jedes komplexe Polynom n-ten Grades hat n Nullstellen, insbesondere gilt das für Polynome der Form $x^n - 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), deren Nullstellen nennt man n-te Einheitswurzeln.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussage stimmt:
Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln nämlich

$$x_i := \cos\frac{2\pi\nu}{n} + i\sin\frac{2\pi\nu}{n},\ 0 \leq \nu < n$$

b) Zeichnen Sie das durch die Einheitswurzeln gegebene Vieleck für $n = 4$ und $n = 5$.

Aufgabe 22 – Speerspitze:

Ein Speer, der senkrecht im Wasser steht, ragt drei Ellen über die Wasseroberfläche hinaus. Der Wind beugt ihn und senkt ihn so ins Wasser, dass sich seine Spitze an der Wasseroberfläche befindet, während das untere Ende seine Lage nicht verändert hat. Gesucht ist die Länge des Speeres, wenn die Entfernung zwischen der anfänglichen Lage der Spitze und dem Berührpunkt mit der Wasseroberfläche fünf Ellen beträgt. (Nach Gamsid Ibn Masud Al-Kasi, 15. Jh.)

Hausaufgabe 23 – Komplexe Zahlen (4 Punkte):

Beweisen Sie, dass die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 genau dann die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, wenn $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ gilt.

Hausaufgabe 24 – Tolstois Spinne (4 Punkte):

In einem Zimmer von 7 Arschin Länge, 6 Arschin Breite und 4 Arschin Höhe sitzen eine Spinne und eine Fliege an den größeren gegenüberliegenden Wänden. Beide sitzen anderthalb Arschin unterhalb der Decke, die Spinne sitzt 1 Arschin von einer Kante und die Fliege 2 Arschin von der diagonal gegenüberliegenden Kante entfernt. Gesucht ist der kürzeste Weg der Spinne zur Fliege.
(Nach dem russischen Schriftsteller Lew N. (Leo) Tolstoi (1828-1910).)