Fachbereich Mathematik
Prof. N. Scheithauer
Julia Plehnert, Jennifer Prasiswa
15.10.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Geometrie für Lehramt

Aufgabe 1 – Gruppen:

Sei G eine Gruppe. Beweisen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung:

a) Sei $e \in G$ linksneutrales Element (d.h. $ea = a,\ \forall a \in G$) und $a, a' \in G$, so dass $a'a = e$. Dann gilt auch $aa' = e$.

b) Sei $e \in G$ linksneutrales Element. Dann gilt auch: $ae = a$ für alle $a \in G$.

c) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a' \in G$ (oft mit a^{-1} bezeichnet).

Aufgabe 2 – Operationen von Gruppen auf Mengen:

Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M operiert. Man nennt

$$Gx = \{gx :\ g \in G\} \subset M$$

den **Orbit (bzw. die Bahn)** von x. Die Menge

$$G_x = \{g \in G : gx = x\} \subset G$$

nennt man **Stabilisator** von x.
$GL_2(\mathbb{R})$ sei die Gruppe der invertierbaren reellen 2×2 Matrizen, also gerade der quadratischen Matrizen A, für die $det(A) \neq 0$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ der Orbit von $(1,0)^{\mathrm{T}}$ ist.

b) Berechnen Sie den Stabilisator von $(1,0)^{\mathrm{T}}$.

Aufgabe 3 – Geraden in $\mathbb{R}^2$:

Jede Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene kann durch eine Gleichung

$$ax + by = c, \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden. Geben Sie eine Darstellung der Geraden

$$G = \{P + t\vec{d} :\ t \in \mathbb{R}\}$$

in der obigen Form an und veranschaulichen Sie sich die geometrische Bedeutung von a, b, c durch eine Skizze.

Aufgabe 4 – Dreieck:

Wir betrachten ein Dreieck in der Ebene, dessen Seiten durch die Gleichungen

$$2x - y + 3 = 0,\ x - 2y + 1 = 0,\ 2x + 3y + 1 = 0$$

gegeben sind. Berechnen Sie die Gleichung der Höhe des Dreiecks, welche orthogonal zur dritten Seite ist.

Hausaufgabe 5 – Bahnen (4 Punkte):

Sei G eine auf der Menge M operierende Gruppe und seien $x,\ y \in M$. Zeigen Sie, dass die Bahnen Gx und Gy entweder disjunkt oder gleich sind. Damit zerfällt M in disjunkte Bahnen.

Hausaufgabe 6 – Abstand Punkt Gerade (4 Punkte):

Eine Gerade sei durch die Gleichung

$$\left(\overrightarrow{n}, (x,y)^{\mathrm{T}}\right) = c, \text{ mit } \overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^2,\ c \in \mathbb{R}$$

gegeben, und $P = (x_0, y_0)$ sei ein weiterer Punkt der Ebene.
Zeigen Sie, dass der Abstand des Punktes zu der Geraden

$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{n}, (x_0, y_0)^{\mathrm{T}}\right) - c\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

ist und veranschaulichen Sie dies mittels einer Skizze.