Lineare Algebra 1
7. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dipl.-Math. Schwieger, Dipl.-Math. Schröder

WS 2011/2012
03.02.2012

Aufgabe T1 (Wege zur Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf folgende Weisen:

(a) Mit der Definition $\det A := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}$,

(b) mit der Regel von Sarrus,

(c) indem Sie A durch Anwendung der Determinanteneigenschaften in Dreiecksgestalt bringen und

(d) durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte.

Bestimmen Sie außerdem A^2 und A^{-1} und deren Determinanten!

Lösung:

(a) Es ist $S_3 = \{\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Das Signum der Zweierzykel ist -1, alle anderen Permutationen haben positives Vorzeichen. Also ist

$$\det A = 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

(b) Wir berechnen

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

(c) Wir verwenden nur Operationen, unter denen die Determinante invariant bleibt, und erhalten

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

(d) Durch Entwicklung nach der zweiten Spalte erhalten wir

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 2 = 4.$$

Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

und nach den Rechenregeln für Determinanten ist $\det(A^2) = (\det A)^2 = 16$ sowie $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe T2 (Vandermonde-Matrix)

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Berechnen Sie die Determinante der Vandermonde-Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Einträgen

$$a_{ij} := x_i^{j-1}.$$

(b) Geben Sie eine unendliche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an, in der jeweils n verschiedene Punkte linear unabhängig sind.

Lösung:

(a) Wir stellen folgende Vermutung auf:

$$\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Wir beweisen die Aussage per Induktion.
Induktionsanfang: $n = 1$

$$\det(1) = \prod_{i,j \in \emptyset} (x_j - x_i) = 1, \text{ (das sogenannte leere Produkt).}$$

Induktionsschritt: Die Aussage gelte für n.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n - x_1^{n-1} x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n - x_n^{n-1} x_{n+1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^n \end{pmatrix} \\
&= \dots \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & x_1(x_1 - x_{n+1}) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_{n+1} & x_n(x_n - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_{n+1}) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

(b) Wir wählen die unendliche Teilmenge wie folgt:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}, \dots \right\} \text{ wobei } \forall i, j : a_i \neq a_j.$$

Wählt man aus dieser Menge n beliebige Punkte heraus, so hat man nichts anderes als eine transponierte Vandermonde-Matrix. Es gilt dann also:

$$\det A^T = \det A = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i) \neq 0,$$

da die a_i elementweise verschieden sind. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe T3 (Determinante)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

(c) Argumentieren Sie, dass die Matrix

$$A_3 = \begin{pmatrix} x^{10}+14x^9+7x^3 & 12x^9+4x^3+3x+1 & 44x^7-3ix^5-6i \\ x^9+x^5-2x^2 & 97x^{10} & 3x-1255 \\ x^5+x^4-x^3-x^2-x+1 & 99 & 11x^{10}-x^9+13x^5-8 \end{pmatrix}$$

für höchstens 30 verschiedene Werte von $x \in \mathbb{C}$ nicht invertierbar ist.

Lösung:

(a) Transformation auf Dreiecksform:

$$\begin{aligned}
\det A_1 &= \det \begin{pmatrix} 1-a^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-a^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-a^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a^n & 0 & \dots & 0 \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \dots \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-a^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= (1-a^n)^{n-1}
\end{aligned}$$

(b) Sarrus'sche Regel:

$$\begin{aligned}
\det A_2 &= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha \\
&= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\
&= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(c) Die resultierende Determinante ist ein Polynom maximal 30ten Grades. Daher kann das Polynom maximal 30 Nullstellen besitzen, d.h. die Determinante verschwindet für maximal 30 verschiedene komplexe Zahlen x.

Aufgabe T4 (Determinante und Matrizen)
Es seien beliebige quadratische Matrizen A und B mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) A hat nur reelle Einträge und $A \cdot A = E \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A+B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (E-A)^{-1} = E + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

Lösung:

(a) Diese Aussage ist richtig.
Sei $A \cdot A = E$. Es gilt $\det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$ und $\det(E) = 1$. Also folgt

$$1 = \det(E) = \det(A \cdot A) = (\det(A))^2$$

und damit

$$\det(A) = \pm 1 .$$

(b) Diese Aussage ist richtig.
Wenn A nicht invertierbar ist, gilt $\det(A) = 0$. Also ist auch $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$ und damit AB nicht invertierbar.

(c) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $\det(A) + \det(B) = 0 + 1 = 1$ und

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 1 = \det(A) + \det(B) .$$

(d) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit auch $A^3 = 0$, aber $A \neq 0$.

(e) Diese Aussage ist richtig.
Wenn $A^3 = 0$ ist, dann gilt auch

$$\begin{aligned} (E-A)(E+A+A^2) &= E + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = E - A^3 = E - 0 = E \text{ und} \\ (E+A+A^2)(E-A) &= E + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = E - A^3 = E - 0 = E . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 .$$

(f) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$. Dann hat A nicht-reelle Einträge, aber $\det(A) = -1 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe T5 (Permutationen und Permutationsmatrizen)
Eine $n \times n$-Matrix heißt Permutationsmatrix, wenn deren Spaltenvektoren eine Permutation der n Standardbasisvektoren darstellen.

(a) Zeigen Sie, dass die $n \times n$ Permutationsmatrizen eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{K})$ bilden.
(b) Finden Sie einen Isomorphismus f von S_n zur Untergruppe der Permutationsmatrizen in $GL_n(\mathbb{K})$.
(c) Zeigen Sie, dass $\det(f(\sigma)) = sign(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_n$ gilt.

Lösung: Nach Definition hat jede Permutationsmatrix die Form

$$A = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

für eine Permutation σ auf der Menge $\{1, \dots, n\}$, d.h. $\sigma \in S_n$. Sei B eine andere Permutationsmatrix

$$B = (e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(n)})$$

mit $\tau \in S_n$. Dann ist das Produkt $C = AB$ wieder eine Permutationsmatrix. Nachrechnen liefert

$$A = (e_{\sigma(\tau(1))}, \dots, e_{\sigma(\tau(n))}).$$

Also ist die Untermenge der Permutationsmatrixen abgeschlossen unter der Matrixmultiplikation in $GL_n(\mathbb{K})$ und das

$$f : S_n \to GL_n(\mathbb{K}),\ \sigma \mapsto (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

ein Isomorphismus zwischen S_n und der Menge der Permutationsmatrizen ist.
Das neutrale Element $E_n \in GL_n(\mathbb{K})$ ist ebenfalls eine Permutationsmatrix.
Ist $A = f(\sigma) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, dann ist

$$\det A = \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = (-1)^{\nu} \det E_n = \mathrm{sign}(\sigma).$$