

Lineare Algebra 1

6. Tutoriumsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dipl.-Math. Schwieger, Dipl.-Math. Schröder

WS 2011/2012
20.01.2012

Aufgabe T1 (Die allgemeine lineare Gruppe $GL_2 \mathbb{F}_p$)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Gruppe $GL_2 \mathbb{F}_p$, das heißt die Gruppe aller invertierbaren 2×2 -Matrizen mit Elementen aus \mathbb{F}_p , wobei p eine beliebige Primzahl ist.

- (a) Bestimmen Sie die Ordnung, das heißt die Anzahl der Elemente, von $GL_2 \mathbb{F}_p$. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:
- Untersuchen Sie, wie viele Vektoren (a, b) mit $(a, b) \in \mathbb{F}_p$ es gibt, die nicht der Nullvektor sind.
 - Bestimmen Sie die Anzahl der Vektoren (c, d) mit $c, d \in \mathbb{F}_p$, sodass die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

- (b) Zeigen Sie, dass $GL_2 \mathbb{F}_2$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Aufgabe T2

Beweisen Sie:

- (a) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E_n - A^m = (E_n - A) \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i \right) (E_n - A).$$

- (b) Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix, für die ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^m = 0$, so ist $E_n - A$ invertierbar. Wie sieht die inverse Matrix aus?

Aufgabe T3 (Schnitt- und Summenbasen)

Der Algorithmus von Zassenhaus ist ein Verfahren zur Bestimmung von Schnitt- und Summenbasen von zwei Untervektorräumen. Der Algorithmus stellt eine Verallgemeinerung des Verfahrens zur Bestimmung einer Basis des von den Zeilen einer Matrix aufgespannten Unterraums dar.

Algorithmus Seien zwei Untervektorräume von \mathbb{K}^n durch

$$U = \text{span}(u_1, \dots, u_t)$$

$$W = \text{span}(w_1, \dots, w_r)$$

gegeben. Konstruiere dann die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_t & u_t \\ w_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ w_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(t+r) \times 2n}.$$

Bringe A durch elementare Zeilenumformungen auf die Form

$$A' = \begin{pmatrix} v_1 & \star \\ \vdots & \vdots \\ v_l & \star \\ 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & y_{m-l} \end{pmatrix}$$

wobei $m = r + t$, v_1, \dots, v_l linear unabhängig sind und \star für beliebige Einträge steht.

Dann ist v_1, \dots, v_l eine Basis von $U + W$ und y_1, \dots, y_{m-l} ein Erzeugendensystem von $U \cap W$.

Beispiel Für $U = \text{span}((1, 1, 0), (1, 1, 1))$ und $W = \text{span}((1, 0, 1), (0, -1, 0))$ (mit Zeilenvektoren als Elementen) kann

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen auf die Form

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Dann ist $U \cap W = \text{span}((1, 1, 1))$ und $U + W = \text{span}((1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, -1, 1))$.

- (a) Zeigen Sie, dass v_1, \dots, v_l und y_1, \dots, y_{m-l} tatsächlich eine Basis von $U + W$ und ein Erzeugendensystem von $U \cap W$ bilden.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$\phi : T \rightarrow \mathbb{K}^n, (x, y) \mapsto x,$$

mit $T := \{(u, u) | u \in U\} + \{(w, 0) | w \in W\}$, also ist T der von den Zeilen der Matrix A aufgespannte Raum.

- (b) Es sei $V = \mathbb{C}^4$ (mit Zeilenvektoren als Elementen) und

$$U := \text{span}((i, 2 + i, -1, 1 - i), (-1, 2i, 0, 1 + 3i), (-i, -2, -1 + i, -3 - i)),$$

$$W := \text{span}((-i, -3 - i, 1 - i, 0), (-i, -1 - i, 1 + i, -1 + 3i), (1 - i, -4i, 2 + 2i, -1 + 3i)).$$

Berechnen Sie Basen von $U + W$ und $U \cap W$.

Aufgabe T4

Seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume.

- (a) Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Basen von V . Seien \mathcal{A}^* und \mathcal{B}^* die zugehörigen dualen Basen von V^* . Zeigen Sie, dass dann für die Transformationsmatrizen gilt

$$T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-T}.$$

- (b) Sei $F : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

$$F^*(U^0) = (F^{-1}(U))^0.$$

Hinweis: $U^0 := \{\varphi \in W^* : \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subset W^*$ ist der sogenannte Annullator von U .