Lineare Algebra 1
4. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dipl.-Math. Schwieger, Dipl.-Math. Schröder

WS 2011/2012
09.12.2011

Aufgabe T1 (Ein Vektor bezüglich verschiedenen Koordinatensystemen)
Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. In dieser Basis sei folgender Vektor gegeben:

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellung von v zu folgenden Basen:

(a) $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(c) $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0.001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 126.5 \\ -32 \\ 0 \\ 10^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix} \right)$

(d) $\mathcal{B}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Aufgabe T2 (Matrizen von lineare Abbildungen und ihr Rang)
Seien die Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrizen $[\phi]$ bzw. $[\psi]$ der Abbildungen bezüglich der Standardbasis. Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes? Wie ist dann die Dimension des Bildes?

Aufgabe T3
Betrachte den reellen Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit U den von $f(t):=\sin(t)$ und $g:=\cos(t)$ aufgespannten Untervektorraum:

$$U := \mathrm{lin}\{\alpha f + \beta g : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\ .$$

(a) Machen Sie sich klar, dass für jede Funktion $h \in U$ auch die Ableitung h' wieder in U liegt. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $D: U \to U$, $Dh := h'$ bezüglich der Basis $\big(f, t\big)$.

(b) Welche geometrische Bedeutung hat die die Multiplikation von D mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^2$? Was lässt sich damit über die Invertierbarkeit der Matrix sagen?

(c) Berechnen Sie D^{1024}.

Aufgabe T4 (Lineare Abbildungen von quadratischen Polynomen)
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir definieren $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\begin{array}{rlcl} L: & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R}^{2\times 2}, \\ & ax^2 + bx + c & \mapsto & aA^2 + bA + cA^0. \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass L eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

(b) Wählen Sie $\mathbb{R}$-Vektorraumbasen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, und geben Sie die Matrix von L bezüglich dieser Basen an. Bestimmen Sie ferner die Dimension des Bildes der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung.

Aufgabe T5 (Idempotente Abbildungen)
Eine Abbildung f einer Menge in sich selbst heißt *idempotent*, wenn $f \circ f = f$ gilt.
Sei V ein K-Vektorraum und f eine idempotente, lineare Abbildung von V in V. Zeigen Sie:

(a) Für alle $v \in \mathrm{Im} f$ gilt $f(v) = v$.

(b) Es gilt $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = V$.

(c) Ist V endlich dimensional, so gilt $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_V) = \dim V$.

(d) Ist f injektiv, so ist $f = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe T6 (Exakte Sequenzen)
Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und $V_0 := \{0\}, V_{n+1} := \{0\}$. Weiterhin seien $F_i : V_i \to V_{i+1}, i = 0, \ldots, n,$ lineare Abbildungen. Es ergibt sich folgende Sequenz von Abbildungen>

$$\{0\} \xrightarrow{F_0} V_1 \xrightarrow{F_1} V_2 \xrightarrow{F_2} \ldots \xrightarrow{F_{n-1}} V_n \xrightarrow{F_n} \{0\}.$$

Wenn $\ker(F_i) = \mathrm{Im}(F_{i-1})$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, dann heißt diese Sequenz exakt.
Zeigen Sie: Wenn obige Sequenz exakt ist, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Dimensionssatz für eine lineare Abbildung $F: V \to W$:

$$\dim \mathrm{Im} F + \dim \ker F = \dim V.$$