Lineare Algebra 1
3. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dipl.-Math. Schwieger, Dipl.-Math. Schröder

WS 2011/2012
25.11.2011

Aufgabe T1 (Untervektorräume)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge von V.
Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

(i) U ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Es sind die zwei Bedingungen
  (1) U ist nicht leer und
  (2) für je zwei Elemente $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ und zwei Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \in U$$

  erfüllt.

Aufgabe T2 (Linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$)
Seien (a, b) und (c, d) zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass sie genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$.

Aufgabe T3 (Untervektorräume)

(a) Bestimmen Sie alle Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie alle Untervektorräume des $\mathbb{Z}_2$-Vektorraumes $(\mathbb{Z}_2)^2$.

Aufgabe T4 (Lineare Abhängigkeit)
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Einselement 1 und $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Zeigen Sie> Für $u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$ (mit $a_i \in \mathbb{K}$) ist die Menge

$$\{u_1 - u, u_2 - u, \ldots, u_n - u\}$$

genau dann linear abhängig, wenn $a_1 + \ldots + a_n = 1$.

Aufgabe T5 (Eigenschaften von erzeugten Untervektorräumen)
Seien S und S' zwei beliebige Teilmengen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

(a) Zeigen Sie, dass aus $S \subseteq S'$ folgt $\mathrm{span}(S) \subseteq \mathrm{span}(S')$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{span}(\mathrm{span}(S)) = \mathrm{span}(S)$.

(c) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen

$$\mathrm{span}(S) \cap \mathrm{span}(S') \neq \mathrm{span}(S \cap S') \text{ und } \mathrm{span}(S) \cup \mathrm{span}(S') \neq \mathrm{span}(S \cup S')$$

  gilt. Welche Inklusionen kann man in diesen Fällen angeben?

Aufgabe T6 (Direkte Summen)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Unterraum. Zeigen Sie, dass dann ein Unterraum W existiert, so dass V die direkte Summe von U und W ist. Das heißt $V = U \oplus W$.

(b) Sei V die direkte Summe von U und W, also $V = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass falls $A = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ und $B = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$ beide linear unabhängig sind, so ist auch $A \cup B$ linear unabhängig.