Lineare Algebra 1
2. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dipl.-Math. Schwieger, Dipl.-Math. Schröder

WS 2011/2012
11.11.2011

Aufgabe T1 (Schreibweisen für Permutationen)
Sei σ eine Permutation. Da die Abbildung σ auf einer endlichen Menge definiert ist, kann man einfach die Bilder der Zahlen $\{1,2,3,\ldots,n\}$ einzeln angeben, um σ eindeutig festzulegen. Zum Beispiel ist durch

$$1 \mapsto 4, \qquad 2 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 3, \qquad 4 \mapsto 2$$

eine vierstellige Permutation gegeben.
Eine andere häufig benutzte Möglichkeit, eine Permutation anzugeben, ist die sogenannte *Matrixschreibweise*. Hier werden die Bilder der einzelnen Zahlen $1,2,3,\ldots,n$ in Form einer Tabelle angegeben, in der ersten Zeile die Elemente von $\{1,2,3,\ldots,n\}$ (meistens in aufsteigender Reihenfolge), in der zweiten Zeile jeweils darunter die Bilder dieser Elemente; die Tabelle wird in runde Klammern gesetzt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Die anfangs als Beispiel angegebene vierstellige Permutation wäre in dieser Schreibweise durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch durch} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Bei der sogenannten *Tupelschreibweise* gibt man in einer Zeile nacheinander die Bilder der Zahlen $1,2,3,\ldots,n$, durch Kommata getrennt, als ein n-Tupel an:

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)).$$

Unsere obige Beispielpermutation würde also $(4,1,3,2)$ notiert werden.
Bei der *Zykelschreibweise* geht man wie folgt vor: Man beginnt mit einem (beliebigen) Element $a \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, ermittelt das Bild $\sigma(a)$ dieses Elementes, dann $\sigma(\sigma(a))$, dann $\sigma(\sigma(\sigma(a)))$, usw. Nach einer Anzahl von Schritten gelangt man wieder zum Element a zurück, mit anderen Worten, man hat einen *Zykel* der Permutation gefunden. Man schreibt nun $(a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a)\ \ldots\ \sigma^k(a))$ auf, wobei $\sigma^k(a)$ das letzte Element der Folge ist, bevor man zu a zurückgelangt. Dann fährt man mit einem anderen Element, das noch nicht notiert wurde, fort und schreibt den entstehenden Zykel wieder in Klammern auf. Dies wiederholt man solange, bis alle Elemente notiert wurden.
Im obigen Beispiel erhält man, wenn man mit 1 beginnt, zunächst den Zykel (142), denn es gilt $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Das einzige verbleibende Element ist 3, es wird auf sich selbst abgebildet und erzeugt damit einen Zykel (3) der Länge eins. Die obige Beispielpermutation lautet also in Zykelschreibweise $(142)(3)$. Oft werden Zykel der Länge eins wieder gestrichen, so dass man stattdessen im Beispiel auch einfach (142) für σ schreiben kann.

(a) Notieren Sie die folgende Permutationen in Zykelschreibweise:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = (5,4,3,2,1).$$

(b) Geben Sie die folgenden siebenstelligen Permutationen in Matrixschreibweise an:

$$\pi = (1\ 6\ 4)(2\ 5)(3\ 7), \quad \phi = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \psi = (1).$$

Aufgabe T2 (Verkettung von Permutationen)

(a) Begründen Sie, warum die Verkettung zweier n-stelliger Permutationen wieder eine n-stellige Permutation ist.

(b) Stellen Sie das Ergebnis der beiden folgenden Verkettungen von Permutationen jeweils in Matrixschreibweise dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (15)(23) \circ (135)(24) \in S_5.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\circ$ auf S_n assoziativ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Permutationen in dieser Teilaufgabe am besten als Abbildungen von $\{1,\ldots,n\}$ in sich.

(d) Bestimmen Sie jeweils die Umkehrabbildung für die beiden folgenden Permutationen aus S_5:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = (134)(25).$$

(e) Zeigen Sie, dass S_n für alle natürlichen Zahlen n eine Gruppe ist.

Aufgabe T3 (Die symmetrische Gruppe S_3)

(a) Geben Sie alle Elemente der symmetrischen Gruppe S_3 sowohl in Matrix als auch in Zykelschreibweise an.

(b) Erstellen Sie eine Verknüpfungstabelle bezüglich der Verkettung zweier Permutationen.

(c) Geben Sie alle Untergruppen von S_3 an.

(d) Ist die symmetrische Gruppe S_3 kommutativ? Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis für S_n mit $n > 3$.