Lineare Algebra 1
1. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dipl.-Math. Schwieger, Dipl.-Math. Schröder

WS 2011/2012
28.10.2011

Aufgabe T4 (Gleichmächtigkeit)
Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat genau $\mathbb{N}$ Betten. Das Hotel ist bereits voll belegt, aber die Mathematiker lassen sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel soll aus wirtschaftlichen Gründen stets voll belegt sein, und wenn möglich, sollen alle neu ankommenden Gäste untergebracht werden. Was macht man in folgenden Fällen?

(a) Ein weiterer Mathematiker trifft ein.
(b) Die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen suchen Unterkunft.
(c) Ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen kommt an.
(d) n Großraumbusse treffen ein.
(e) $\mathbb{N}$ Großraumbusse fahren vor.

Lösung:

(a) Ein weiterer Mathematiker trifft ein:
Jeder Mathematiker zieht von Zimmer i nach Zimmer $i+1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dadurch wird Zimmer 0 für den Neuankömmling frei.

(b) Die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen suchen Unterkunft:
Jeder Mathematiker zieht von Zimmer i nach Zimmer $i+n$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dadurch werden die Zimmer 0 bis $n-1$ frei.

(c) Ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen kommt an:
Jeder Mathematiker zieht von Zimmer i nach Zimmer $2i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dadurch werden alle Zimmer mit ungerader Zimmernummer frei für die $\mathbb{N}$ Neuankömmlinge.

(d) n Großraumbusse mit jeweils $\mathbb{N}$ Personen treffen an:
Man wiederholt den Vorgang aus (3) n-mal. Insgesamt bedeutet das: Jeder Mathematiker zieht von Zimmer i nach Zimmer $(n+1)i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Der k-te Mathematiker aus Bus j zieht dann in Zimmer $(k-1)(n+1)+j$ ein, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(e) $\mathbb{N}$ Großraumbusse fahren vor:
Jedem Mathematiker wird ein Element aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zugeordnet:

$$\begin{array}{ccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & \text{für die alten Gäste} \\
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & \text{für die Gäste aus Bus 1} \\
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & \text{für die Gäste aus Bus 2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \\
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & \text{für die Gäste aus Bus } n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots &
\end{array}$$

Nach dem Cantorschen Verfahren bekommen nun die Gäste ihren Raum zugeordnet. Ganz ähnlich dem Beweis der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$.