Lineare Algebra 1
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
26. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Triviale Quotienten)
Sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$f_1 : V \to V, \quad v \mapsto v\,, \qquad\qquad f_2 : V \to V, \quad v \mapsto 0\,.$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass es zugehörige lineare Abbildung $\tilde{f}_1 : V / \ker f_1 \to V$ und $\tilde{f}_2 : V / \ker f_2 \to V$ gibt. Die Isomorphie welcher Vektorräume kann man daraus schließen?

Aufgabe G2 (Quotienten und Affine Teilräume)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und den vom Vektor $(1,-1)^T$ aufgespannten linearen Teilraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie die affinen Teilräume $\binom{1}{0} + U$, $\binom{2}{0} + U$ und $\binom{1}{1} + U$.

(b) Zeigen Sie: Für jeden Vektor $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\binom{a}{b} + U = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = a + b \right\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : V/U \to \mathbb{R}, \quad \binom{a}{b} + U \mapsto a + b$$

ein wohldefinierter Vektorraum-Isomorphismus ist. Wie lässt sich diese Abbildung anhand Ihrer Skizze interpretieren?

Aufgabe G3
Seien V_1, V_2 Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$ jeweils lineare Teilräume. Sei $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. Wann ist die Abbildung

$$F : V_1/U_1 \to V_2/U_2, \quad F(v + U_1) = f(v) + U_2$$

für alle $v \in V_1$ wohldefiniert? Finden Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

Hausübung

Aufgabe H1 (Duale Räume)
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $W \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Wir bezeichnen mit

$$\pi : V \to V/W, \quad v \mapsto v + W$$

die natürliche Quotientenabbildung. Wir betrachten die Dualräume

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}), \qquad (V/W)^* = \mathrm{Hom}(V/W, \mathbb{K}).$$

und die zu π gehörige duale Abbildung

$$\pi^* : (V/W)^* \to V^*, \quad \omega \mapsto \omega \circ \pi .$$

(a) Machen Sie sich klar, dass π^* eine wohldefinierte, lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung π^* injektiv ist.

(c) Das Bild $\pi^*\big((V/W)^*\big)$ ist ein Untervektorraum von V^*. Wie groß ist die Dimension des Quotientenvektorraumes
$$V^*/\pi^*\big((V/W)^*\big)\ ?$$

Aufgabe H2 (Quotient vs. Komplement)
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Erinnern Sie sich, dass es einen Untervektorraum $W \subseteq V$ gibt mit $V = U \oplus W$. (Warum nochmal? Vgl. 7. Übung, Aufgabe G2). Zeigen Sie: Für jeden Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$ ist der Vektorraum W isomorph zum Quotienten V/U.

Aufgabe H3 (Quotienten in Funktionenräumen)
Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Teilmenge

$$U := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1] : \quad f(x) = 0\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass U ein linearer Teilraum von $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie: Der Quotientenvektorraum $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/U$ ist isomorph zum Vektorraum $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.