Lineare Algebra 1
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
26. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei V der reelle Vektorraum, der von den Funktionen in $\mathscr{B} := (f_1, \dots, f_5)$, $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f_1(t) := \sin(t)\,, \qquad f_2(t) := \cos(t)\,, \qquad f_3(t) := \sin(t)\cdot\cos(t)\,, \qquad f_4(t) := \sin^2(t)\,, \qquad f_5(t) := \cos^2(t)$$

aufgespannt wird. Wir betrachten die Ableitung $\varphi : V \to V$, $f \mapsto f'$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}$ eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_B^B$.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes von φ.

Aufgabe G2
Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Matrizen $v_i v_j^t$, $1 \leq i, j \leq n$, in $M_n(\mathbb{R})$ sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe G3
Wir betrachten den Ring $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Für eine Teilmenge $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ heißt die Menge

$$S' := \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in S : \quad AB = BA\}$$

die *Kommutante* von S.

(a) Zeigen Sie, dass die Kommutante S' einer beliebigen Teilmenge $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum ist, der unter Multiplikation abgeschlossen ist. (Ein solcher Teilraum heißt auch *Unteralgebra* von $M_n(\mathbb{R})$.)

(b) Sei $\mathscr{D}_n \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Diagonalmatrizen. Zeigen Sie $\mathscr{D}_n' = \mathscr{D}_n$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kommutante $M_n(\mathbb{R})'$ genau aus den skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix besteht.

(d) Sei $0 < k < n$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{A}$ die Menge aller Blockmatrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $A_1 \in M_k(\mathbb{R})$ und $A_2 \in M_{n-k}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Kommutante von $\mathscr{A}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Duale Abbildungen)
Für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W bezeichnen wir mit

$$\varphi^* : W^* \to V^*, \quad \varphi(\omega) := \omega \circ \varphi$$

die duale Abbildung zwischen den Dualräumen V^* und W^*. Zeigen Sie:

(a) Für zwei lineare Abbildungen $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ gilt $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(b) Ist φ surjektiv, so ist φ^* injektiv.

Seien V und W endlich-dimensional. Sei $\mathscr{B} := (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathscr{C} := (w_1, \dots, w_m)$ ein Basis von W. Wir bezeichnen jeweils mit $\mathscr{B}' := (v_1', \dots, v_n')$ und $\mathscr{C}' := (w_1', \dots, w_n')$ die zugehörige duale Basis.

(c) Zeigen Sie für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$: Ist $A = [\varphi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$, so ist $A^t = [\varphi^*]^{\mathscr{C}'}_{\mathscr{B}'}$.

Hierbei bezeichnet A^t die transponierte Matrix zu A.
Die folgenden Zusatzfragen führen zwar um Einiges über den Stoff hinaus. Eine Beschäftigung damit liefert aber u.U. tiefere Einblicke in die Problematik:

(d*) Wie sieht es mit der Umkehrung von (b) aus?

(e*) Folgt aus der Injektivität von φ die Surjektivität von φ^*? Oder umgekehrt?

Aufgabe H2
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \\ \beta + 3 \end{pmatrix}$$

lösbar? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe H3
Wir betrachten den Ring $M_2(\mathbb{R})$ der reellen (2×2)-Matrizen. Erinnern Sie sich, dass die Menge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe bilden. Wir definieren

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \,.$$

Für eine Matrix A heißt der Wert $\det(A)$ die *Determinante* von A.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist. Diese Gruppe heißt auch die *spezielle, lineare Gruppe*.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = E = A \cdot A^t\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist. Diese Gruppe heißt auch die *orthogonale Gruppe*.

(c) Machen Sie sich klar, dass der Schnitt $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ wieder eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist. Die Gruppe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ heißt auch *spezielle, orthogonale Gruppe*. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ von der Form

$$A_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für eine reelle Zahl φ ist. Folgern Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ isomorph zum Einheitskreis-Gruppe $\{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist.