Lineare Algebra 1
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
11. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Äquivalenzrelationen)
Erinnern Sie sich: Eine *Relation* auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Eine Relation auf M heißt *Äquivalenzrelation*, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt

(a) reflexiv: $(x, x) \in R$,

(b) symmetrisch: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$,

(c) transitiv: $(x, y), (y, z) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, z) \in R$.

Anstelle von $(x, y) \in R$ schreibt man oft auch $x \sim_R y$ oder, falls die Relation durch den Kontext gegeben ist, auch $x \sim y$. Für ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt die Menge $[x] := \{y \in M \mid y \sim x\}$ die *Äquivalenzklasse* von x.

(a) Finden Sie mindestens 3 Äquivalenzrelationen, die in Ihrem Alltag eine Rolle spielen, z.B. auf der Menge aller Studenten, der Menge aller Produkte im Supermarkt, auf der Menge der Lineare-Algebra-Übungsaufgaben etc.

(b) Vielleicht erinnern Sie sich auch noch an Aufgabe G4 der 6.Übung. Dort haben wir eine feste natürliche Zahl $n \geq 2$ die Mengen $[x] := \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $x \in \mathbb{Z}$ betrachtet. Machen Sie sich klar, dass auf den ganzen Zahlen $M := \mathbb{Z}$ wie folgt eine Äquivalenzrelation definiert ist:

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad [x] = [y] .$$

Machen Sie sich auch klar, dass $[x]$ tatsächlich die Äquivalenzklasse von x ist. Die Notation ist also konsistent.

(c) Wir betrachten die Menge $M_2(\mathbb{R})$ aller reellen (2×2)-Matrizen und definieren eine Relation auf $M_2(\mathbb{R})$ durch

$$A \sim B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad AB = BA$$

Zeige oder widerlege, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

(d) Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine Relation wie folgt: Es sei $x \sim y$ genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ gibt mit $Ax = y$. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt. Bestimmen Sie für jedes Element $x \in \mathbb{R}^n$ die Äquivalenzklasse $[x] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe G2 (Dreiecksmatrizen)

(a) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier quadratischer oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Wann ist eine obere Dreiecksmatrix invertierbar? Finden Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

(c) Zeigen Sie, dass die Inverse einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(d) Wann ist eine obere Dreiecksmatrix A *nilpotent*, d.h. wann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$? Finden Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

Aufgabe G3
Sei M eine beliebige Menge und V ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $f : M \to V$ einen Vektorraum bilden. Definieren Sie als erstes eine geeignete (einfache) Addition und Skalarmultiplikation.

Aufgabe G4 (Äquivalenz von Matrizen)
Zwei $(n \times n)$-Matrizen A, B heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare Matrizen $S \in M_m$ gibt mit

$$B = SAS^{-1}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass „Ähnlichkeit" tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf $M_n(\mathbb{R})$ definiert.

(b) Welche der folgenden Matrizen sind ähnlich?

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie ihre Behauptung.

Hausübung

Aufgabe H1 (Basiswechsel vorwärts)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ bzw. } C = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ bzw. } E_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]_B^C := \begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]_{E_2}^{E_3}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_B$.

Aufgabe H2 (Basiswechsel rückwärts)
Bezüglich der Basis

$$B := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

sei der Endomorphismus $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\frac{2\pi}{3})&-\sin(\frac{2\pi}{3})\\0&\sin(\frac{2\pi}{3})&\cos(\frac{2\pi}{3})\end{pmatrix}.$$

Gib eine geometrische Interpretation dieser Abbildung an. Bestimme nun die Matrix von ϕ bezüglich der Standardbasis.
Hinweis: $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe H3 (Basiswechsel, frei)
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass jede Matrix A äquivalent zu einer Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c}E_k&0\\\hline 0&0\end{array}\right)$$

ist. Bestimmen Sie für die folgende Matrix A konkrete Matrizen S und T, sodass SAT von obiger Form ist:

$$A := \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}$$