Lineare Algebra 1
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
22. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ im Allgemeinen wahr sind und begründen Sie Ihre Antworten. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

[ ] Die Lösungsmenge enthält die Null in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn das System homogen ist.

[ ] Ist die Anzahl der Gleichungen m größer als die Zahl der Variablen n, so hat das System keine Lösungen.

[ ] Es gibt nur dann eine Lösung, wenn mindestens ein Koeffizient a_{ij} gleich Null ist.

[ ] Das System hat genau dann eine Lösung, wenn es in Stufenform gebracht werden kann.

[ ] Ist bei einem homogenen System die Anzahl der Gleichungen m kleiner als die Anzahl der Variablen n, so gibt es Lösungen, die nicht gleich Null sind.

[ ] Ist der Rang gleich der Anzahl der Variablen, so ist das System eindeutig lösbar.

Aufgabe G2 (Berechnen des Inversen)
Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus das Inverse der folgenden Matrix mit Einträgen in dem Körper $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [4] & [1] & [2] \\ [3] & [4] & [1] \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Basis mittels Gauß-Algorithmus)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus eine Basis des linearen Teilraums, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4

Beschreiben Sie die folgenden Operationen durch Matrixmultiplikation. Genauer: Finden Sie jeweils eine Matrix A, so dass die Multiplikation mit A von links oder von rechts folgendes bewirkt:

(a) Das Vertauschen der i-ten und der j-ten Spalte.

(b) Das Multiplizieren der i-ten Spalte mit einem Skalar λ.

(c) Das Addieren der i-ten und der j-ten Spalte.

(d) Das Addieren des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte.

Warum kann man beim Berechnen des Inversen einer Matrix mittels Gauß-Algorithmus auch **nur** Spalten- statt Zeilenumformungen verwenden? Warum darf man nicht Zeilen- **und** Spalten-Umformungen verwenden?

Aufgabe G5

Ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Lösungen eine Gleichung der Form

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

(a) Welche geometrischen Größen des Kreises werden durch die Konstanten a, b und c beschrieben?

(b) Um die Konstanten a, b und c mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmen zu können, muss man zunächst eine Umformung durchführen. Ausmultiplizieren der Gleichung (1) und Subtrahieren von $a^2 + b^2$ ergibt die Gleichung $x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = c - a^2 - b^2$. Setzt man nun noch $\widetilde{c} = c - a^2 - b^2$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = \widetilde{c}\,. \tag{2}$$

Welche Bedingungen müssen nun für die Konstanten a, b und $\widetilde{c}$ gelten, damit die Gleichung (2) einen Kreis beschreibt?

(c) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte $(-1, 3)$, $(0, 4)$ und $(4, -2)$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist das Gleichungssystem $Ax = b_1$ bzw. $Ax = b_2$ lösbar? Bestimmen Sie ggf. die Lösungsmenge mittels Gauß-Algorithmus.

Aufgabe H2 (Basiswechsel) (4 Punkte)

Sei $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \quad \varphi(p)(x) := xp(x),$$

und die Vektoren $p_i(x) := x^i$, $q_i(x) := (x+1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$. Man macht sich leicht klar, dass dann $B := (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ und

$$C := (p_0, p_1, p_2, p_3)\,, \qquad C' := (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

jeweils Basen von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ sind. Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_C^B$ und $[\varphi]_{C'}^B$.

Aufgabe H3 (Hamming-Abstand) (8 Punkte)
Betrachten Sie den Vektorraum $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{0,1\}^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In der Informatik wird ein Vektor $x \in \{0,1\}^n$ als Bit-String interpretiert. Eine Teilmenge $C \subseteq \{0,1\}^n$ heißt auch *Code*. Für zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definieren wir ihren Abstand $d(x, y)$ als die Anzahl der verschiedenen Stellen, d.h.

$$d(x,y) := \left|\{i : 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq y_i\}\right| .$$

Dieser Abstand heißt *Hamming-Abstand*. Für eine Teilmenge $C \subseteq \{0,1\}^n$ definieren wir den *inneren Hamming-Abstand* durch

$$H(C) := \min\{d(x,y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine *Metrik* ist, d.h. zeigen Sie für alle $x, y, z \in \{0,1\}^n$:
  i. Definitheit: $d(x,y) = 0$ gdw. $x = y$.
  ii. Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$.
  iii. Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \{0,1\}^n$ gilt $d(x,y) = d(x-y,0)$. Folgern Sie, dass für einen linearen Teilraum $C \subseteq \{0,1\}^n$ gilt

$$H(C) = \min\{d(x,0) \mid 0 \neq x \in C\} .$$

(c) Sei $C \subseteq \{0,1\}^7$ der lineare Teilraum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 + x_6 \qquad &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 \qquad + x_5 \qquad + x_7 &= 0 . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Teilraums.

(d) Bestimmen Sie den inneren Hamming-Abstand von C.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $H(C) \leq 3$ (, dann $H(C) > 1$) und dann $H(C) > 2$.

(e) Sei weiter C der lineare Teilraum aus (c). Nehmen Sie an, Alice möchte an Bob einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_7) \in C$ übertragen, indem nacheinander jede einzelne Koordinate gesendet wird. Bei der Übertragung können Fehler auftreten, sodass Bob einen Vektor $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^7$ empfängt. Erläutern Sie, dass Bob die Nachricht von Alice eindeutig rekonstruieren kann, wenn bei der Übertragung an höchstens einer Stelle ein Fehler aufgetreten ist.

(f) Nehmen Sie konkret an, Bob empfängt $y := (0,1,1,1,0,0,1)$ und nehmen Sie an, dass höchstens an einer Stelle ein Übertragungsfehler passiert ist. Was hat Alice gesendet?

Aufgabe H4 (Wann sind affine Teilräume gleich?) (4 Punkte)
Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie: Für Vektoren $x, y \in V$ und lineare Teilräume $U, W \subseteq V$ sind äquivalent:

(a) $x + U = y + W$. (b) $U = W$ und $(x - y) \in U$.

Nicht vergessen:
Anmeldung zum Mentorensystem bis zum 05.01.2012.
Studienanfänger Bachelor Mathematik über die Seite
`https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/evs/e/23/982.html`
Studienanfänger Lehramt Gymnasium Mathematik über die Seite
`https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/evs/e/23/983.html`