Lineare Algebra 1
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
15. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachten Sie für die folgenden $(m \times n)$-Matrizen jeweils die durch $x \mapsto A_i x$ gegebene Abbildung $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Welche der Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? (Wie kann man dies an den Matrizen ablesen?) Geben Sie jeweils die Dimension des Bildes und des Kerns von φ an.

Aufgabe G2 (Basistransformation)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zum einen mit der kanonischen Basis B_0, zum anderen mit der Basis $B = \big((1,-1,-1)^T, (1,0,1)^T, (1,1,1)^T\big)$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$[\varphi]_{B_0}^{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{und} \qquad [\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $[\mathrm{id}]_{B_0}^B$ und verifizieren Sie

$$[\mathrm{id}]_B^{B_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie die Matrix der inversen Abbildung $[\varphi^{-1}]_B^B$ und damit $[\varphi^{-1}]_{B_0}^{B_0}$.

Aufgabe G3

Für eine $(n \times m)$-Matrix Matrix $A =: (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ ist die *transponierte Matrix* die $(m \times n)$-Matrix mit $A^T := (a_{j,i})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$, d.h.

$$A =: \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Machen Sie sich klar, dass die Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen einen reellen Vektorraum bilden. Wir betrachten hier den Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der (2×2)-Matrizen und die folgende lineare Abbildung:

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) := \tfrac{1}{2}(A - A^T)$$

(a) Zeigen Sie $\varphi^2 = \varphi$.
Bemerkung: Lineare Abbildungen φ mit $\varphi^2 = \varphi$ heißen auch *Projektionen*. Die obige Abbildung ist also eine Projektion.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes von φ.

(c) Zeigen Sie $M_2(\mathbb{R}) = (\ker \varphi) \oplus (\operatorname{im} \varphi)$. Wie sieht die Matrix von φ bezüglich der von Ihnen gewählten Basis von $M_2(\mathbb{R})$ aus?

Aufgabe G4 (Affine Teilräume, Fingerübung)

Sei V ein reeller Vektorraum. Für einen Vektor $v \in V$ und eine Teilmenge $S \subseteq V$ setzen wir $v + S := \{v + s \mid s \in S\}$. Zeigen Sie: Für eine nicht-leere Teilmenge $A \subseteq V$ sind äquivalent:

(a) Es gibt einen Untervektorraum $U \subseteq V$ und einen Vektor $v \in V$ mit $A = v + U$

(b) Für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$.

Wie lässt sich die Bedingung (b) geometrisch interpretieren? Eine Teilmenge A, für welche diese Bedingungen erfüllt sind, heißt auch *affiner Teilraum* von V.

Aufgabe G5

In der Vorlesung haben Sie gezeigt, dass eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

(a) Finden Sie einen Vektorraum und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Finde Sie eine Vektorraum und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie den Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$ fix. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) := B \cdot A\,.$$

(b) Betrachten Sie nun speziell $n = 2$ und $B =: \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ an und bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe H2 (Polynominterpolation) (4 Punkte)
Bei der Polynominterpolation geht es darum ein Polynom zu finden, welches an gegebenen paarweise verschiedenen (Stütz-)Stellen $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ bestimmte vorgegebene Wert $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ annimmt. Das heißt wir suchen ein Polynom p mit

$$y_0 = p(t_0)\,, \qquad y_1 = p(t_1)\,, \qquad \dots \qquad y_n = p(t_n)\,.$$

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass es genau ein solches Polynom vom Grad n gibt. Hierzu bezeichnen wir mit $L \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome, welche diese Gleichung erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass L entweder leer oder ein affiner Unterraum von $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_0, \dots, p_n$ eine Basis von $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ bilden, wobei:

$$p_i(t) := \prod_{i \neq j} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \frac{t - t_0}{t_i - t_0} \cdot \ldots \cdot \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{t - t_n}{t_i - t_n}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Polynome an den Stützstellen $t_0, \dots, t_n$.
Bemerkung: Die Polynome $p_0, \dots, p_n$ heißen *Lagrange-Polynome* zu den Stützstellen $t_0, \dots, t_n$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

$$\Phi : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Phi(p) := \big(p(t_0), p(t_1), \dots, p(t_n)\big)^T\,.$$

linear ist mit $\ker \Phi = \{0\}$, und folgern Sie, dass es genau ein Polynom $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ gibt mit $p(t_0) = y_0, \dots, p(t_n) = y_n$.

(d) Geben Sie dieses Polynom in den Koordinaten bzgl. der obigen Basis $p_0, \dots, p_n$ an.

Aufgabe H3 (Minimalpolynom und Inverses) (4 Punkte)
Machen Sie sich klar, dass die Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen einen reellen Vektorraum bildet. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit:
   i. Die Matrizen $E, A, \dots, A^{m-1}$ sind linear unabhängig.
   ii. Die Matrizen $E, A, \dots, A^{m-1}, A^m$ sind linear abhängig.

(b) Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$, die nicht alle verschwinden und für die gilt

$$A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 E = 0\,.$$

Bemerkung: Das Polynom $P(X) := a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m$ heißt auch das *Minimalpolynom* von A.

(c) A ist genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist A^{-1} ein Polynom in A.