Lineare Algebra 1
8. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
8. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Aufwärmen)

(a) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind linear? Begründen Sie ihre Entscheidung.

[ ] $(x, y) \mapsto x + 2y$, [ ] $(x, y) \mapsto xy$, [ ] $(x, y) \mapsto |x|$.

(b) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Sind die Bilder $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Aufgabe G2 (Koordinaten)

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ und der Basis $B' = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 := (1, 0, 1)^T, \qquad b_2 := (1, 1, 0)^T, \qquad b_3 := (0, 1, 1)^T.$$

(a) Der Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Basis B' die Koordinaten $(3, 2, 1)^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich der Basis B.

(b) Der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasis B die Koordinaten $(2, 2, 2)^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B'.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich der Basis B'.

Aufgabe G3 (Spiegelung an einer Ebene)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Mit $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir die Spiegelung an der Ursprungsebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene an und eine Basis des linearen Teilraums E.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich einer geeignet gewählten Basis B von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Standardbasis bzgl. der Basis B.

(d) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G4 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)

Zeigen Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen: Für eine lineare Abbiludng $\varphi : V \to W$ auf einem endlich-dimensionalem Vektorraum V gilt

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im} \varphi).$$

Aufgabe G5 (Lineare Abbildung auf direkten Summen)

(a) (Erinnerung?) Sei $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei lineare Teilräume mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von U_1 und $c_1, \dots, c_m$ eine Basis von U_2. Dann ist $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ eine Basis von $U_1 \oplus U_2$.

(b) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei Vektorräume und $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$.

(c) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V, sodass es für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$ gibt. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H1 ($\mathbb{C}$ als (2×2)-Matrizen)
Betrachten Sie die Menge der komplexen Zahlen $V := \mathbb{C}$ als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Machen Sie sich klar, dass $v_1 := 1$ und $v_2 := i$ eine Basis von $\mathbb{C}$ bilden. Für eine komplexe Zahl z betrachten wir die folgende Abbildung

$$\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_z(w) := z \cdot w \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass φ_z eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix A_z von φ_z bezüglich der Basis $1, i$.

(c) Beschreiben Sie die Abbildung φ_z für eine reelle Zahle $z \in \mathbb{R}$ und für eine Zahl auf dem Einheitskreis, $|z| = 1$, geometrisch in eigenen Worten.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge aller darstellenden Matrizen $\{A_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper bilden.

Aufgabe H2 (Lineare Unabhängigkeit in Funktionenräumen)
Sei M eine nichtleere Menge. Betrachte den Vektorraum $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Zeigen Sie:

(a) Seien $x_1, \dots, x_n \in M$. Dann ist die folgende Abbildung linear:

$$\mathrm{eval}_{x_1,\dots,x_n} : \mathscr{F}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n, \quad f \mapsto \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) \, .$$

(b) Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{F}(M, \mathbb{K})$. Gibt es Elemente $x_1, \dots, x_n \in M$, so dass die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v_i := \big(f_i(x_1),\ f_i(x_2), \dots, f_i(x_n)\big) \qquad (1 \le i \le n) \tag{1}$$

linear unabhängig sind, so sind auch die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig.

(c*) Gilt auch die Umkehrung: Sind $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ linear unabhängig, so gibt es Elemente $x_1, \dots, x_n \in M$, so dass die Vektoren $v_1, \dots v_n$ aus (1) linear unabhängig sind?

Aufgabe H3 (Schwingungen gleicher Frequenz)
Betrachte den reellen Vektorraum $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne f_α die Funktion mit $f_\alpha(t) := \sin(t + \alpha)$. Wir bezeichnen mit U den von diesen Funktionen aufgespannten Untervektorraum:

$$U := \mathrm{span}\{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \, .$$

(a) Skizzieren Sie einige der Funktionen f_α für verschiedene Werte von α. Zeigen Sie, dass die Funktionen f, g mit $f(t) := \sin(t)$ und $g(t) := \cos(t)$ in U liegen.

(b) Zeigen Sie, dass U ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.

(c) Berechnen Sie die Koordinaten der Funktion $f_{\pi/4}$ bezüglich der Basis aus (b).

(d) Sei $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ fix. Machen Sie sich klar, dass für jede Funktion $f \in U$ auch die Funktion $(Sf)(t) := f(t + \alpha_0)$, $t \in \mathbb{R}$, wieder in U liegt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$S : U \to U, \quad f \mapsto Sf$$

linear ist. Beschreiben Sie die Abbildung S anhand Ihrer Skizze mit eigenen Worten. Bestimmen Sie die Matrix von S bezüglich der Basis aus (b).

Hinweis: Verwenden Sie Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.