Lineare Algebra 1
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
1. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$v_1 := (0,1,1)\,, \qquad v_2 := (1,0,1)\,, \qquad v_3 := (1,1,0)\,, \qquad v_4 := (1,1,1)\,.$$

(a) Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig?

(b) Sind v_1, v_2, v_3 und v_4 linear unabhängig?

(c) Bilden v_1, v_2, v_3 und v_4 ein Erzeugendensystem?

(d) Welche Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Aufgabe G2 (Basis und direkte Summe)
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

(a) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ lineare Teilräume mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Zeigen Sie ohne Verwendung der Dimensionsformel:

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)\,.$$

(b) Sei $U_1 \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie: Es gibt einen Teilraum $U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$ gibt.

Aufgabe G3
Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$ und die folgenden linearen Teilräume des Vektorraums $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$:

$$U := \operatorname{span}\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}\,,$$
$$V := \operatorname{span}\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0)\}\,.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U, V, $U+V$ und $U \cap V$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Basis) (4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden linearen Teilräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} ,$$
$$V := \operatorname{span}\{(1, -2, 3, 0),\ (2, 0, 3, 1)\} .$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe H2 (Basen über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) (4 Punkte)
Betrachten Sie den Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

(a) Nennen Sie alle Basen des Vektorraums $\mathbb{K}^2$.

(b) Wieviele verschiedene Basen hat der Vektorraum $\mathbb{K}^3$?

(c) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Anzahl der verschiedenen Basen des Vektorraums $\mathbb{K}^n$ an.

Begründen Sie Ihre Antworten.
Hinweis: Wieviele Element hat ein n-dimensionaler Teilraum?

Aufgabe H3 (Dimension und Dimensionsformel) (4 Punkte)

(a) Sei U ein linearer Teilraum eines n-dimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie: $\dim(U) \leq n$, und es gilt genau dann $\dim(U) = n$, wenn $U = V$.

(b) Seien U und W jeweils 2-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie $U \cap W \neq \{0\}$.

(c) Seien U und W zwei verschiedene 4-dimensionale Untervektorräume eines 6-dimensionalen Vektorraumes V. Welche Dimension kann der Teilraum $U \cap W$ haben? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

(d) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension $\dim U =: r < n$. Zeigen Sie: U ist der Schnitt aller $(n-1)$-dimensionalen Untervektorräume $W \subseteq V$ mit $U \subseteq W$.

Hallo Studis,
Die Weihnachtszeit steht vor der Tür und wie jedes Jahr verwandelt sich der Mathebau zu dieser Zeit in einen Adventskalender, der Süßigkeiten und Überraschungen für euch bereit hält! An einigen Bürotüren hängen Plakate mit Rätseln, welche eine (Tages)Zahl ergeben. Klopft ihr am richtigen Tag an die richtige Tür, erwarten euch Plätzchen, Lebkuchen und ein freundlicher Professor oder Mitarbeiter. Außerdem könnt ihr Stempel sammeln und an der Verlosung weiterer toller Preise teilnehmen. Mehr Infos gibt es unter www.mathebau.de.
Weihnachtliche Grüße,
Eure Fachschaft