Lineare Algebra 1
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
24. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Welche der Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$?

- [ ] eine beliebige einpunktige Menge,
- [ ] eine Gerade durch den Ursprung,
- [ ] $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$,
- [ ] ein Kreis mit Radius 1 um $(0,0)$,
- [ ] $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$,
- [ ] $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- [ ] Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
- [ ] Die Summe zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
- [ ] Der Schnitt zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

Aufgabe G2

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$U := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_3=0\}\,, \qquad V := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_3=x_2\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Ist $U+V=\mathbb{R}^3$? Ist $U\oplus V=\mathbb{R}^3$?

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die Kürzungsregel für direkte Summen: Sind A, B, C lineare Teilräume eines Vektorraumes V mit $A\oplus B=A\oplus C$, so gilt $B=C$.

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1=(0,4,1)$, $v_2=(2,3,1)$, $v_3=(1,2,0)$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.

Aufgabe G4 ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

Erinnern Sie sich an Ihr Schulwissen über die Division mit Rest. Sei $n\geq 2$ eine feste natürliche Zahl. Für eine ganze Zahl $x\in\mathbb{Z}$ definieren wir

$$[x] := x+n\mathbb{Z} := \{x+nk \mid k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

(a) Machen Sie sich klar, dass $3+5\mathbb{Z}=8+5\mathbb{Z}$ gilt. Wieviele verschiedene Mengen der Form $x+n\mathbb{Z}$ mit $x\in\mathbb{Z}$ gibt es, d.h. wieviele Elemente hat die Menge

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[x] \mid x\in\mathbb{Z}\} = \{x+n\mathbb{Z} \mid x\in\mathbb{Z}\}\,?$$

Hinweis: Finden Sie für $x\in\mathbb{Z}$ eine möglichst kleine Zahl $r\geq 0$ mit $x+n\mathbb{Z}=r+n\mathbb{Z}$.

Auf der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definieren wir zwei Verknüpfungen durch [1]

$$[x]+[y] := [x+y]\,, \qquad [x]\cdot[y] := [x\cdot y]\,.$$

[1] Sind Sie mit dieser Definition zufrieden? Was müsste man hier eigentlich noch zeigen?

(b) Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auf.

(c) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Elemente $[2]^2$, $[2]^3$, $[2]^4$, $[2]^5$, $[2]^6$ und $[2]^7$. Welche Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind (multiplikativ) invertierbar? Geben Sie jeweils das Inverse.

(d) Wie würden Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist? Skizzieren Sie den Beweis.

(e) In den Hausübungen werden Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für eine Primzahl n ein Körper ist. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrung gilt, d.h. ist n keine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kein Körper.

Aufgabe G5

(a) In Aufgabe G3 haben wir gezeigt, dass die Vektoren $v_1 = (0,4,1)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (1,2,0)$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 aufgefasst als Vektoren im Vektorraum $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ linear abhängig sind.

(b) Machen Sie sich klar, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation ist. Zeigen Sie, dass 1 und $\sqrt{2}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (Der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) (4 Punkte)

Sei $p \geq 2$ eine Primzahl. Wir haben in Aufgabe G4 gesehen, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sogar ein Körper ist. Wir müssen dazu wir lediglich noch zeigen, dass jedes Element $[0] \neq [x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Wir gehen in folgenden Schritten vor:

(a) Mit Hilfe der Zerlegung in Primfaktoren kann man zeigen, dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt

Ist $x \cdot y$ ein Vielfaches von p, so ist x ein Vielfaches von p oder y ein Vielfaches von p.

Sie brauchen diese Aussage nicht beweisen. Zeigen Sie damit, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ keine Nullteiler besitzt.

(b) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Folgern Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $[x]^k = [0]$, so gilt bereits $[x] = [0]$. Folgern Sie weiter für $k_2 > k_1$: Ist $[x]^{k_1} = [x]^{k_2}$, so gilt entweder $[x] = [0]$ oder $[x]^{k_2-k_1} = [1]$.

(c) Sei nun $[0] \neq [x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es Exponenten $k_1 \neq k_2$ gibt mit $[x]^{k_1} = [x]^{k_2}$.
Hinweis: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat nur endlich viele Elemente.

(d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Aufgabe H2 (Lineare Unabhängigkeit) (4 Punkte)

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $V = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. 5. Übung, H3).

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(c) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := 1, \quad f_2(x) := x, \quad f_3(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Aufgabe H3 (Direkte Summen) (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des reellen Vektorraumes $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. 5. Übung, H3):

$$V_+ := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}. \quad f(x) = f(-x)\},$$
$$V_- := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}. \quad f(x) = -f(-x)\}.$$

Bemerkung: Die Funktionen $f \in V_+$ heißen *gerade Funktionen*, die Funktionen $f \in V_-$ *ungerade Funktionen*.

(a) Geben Sie jeweils zwei von Null verschiedene Vektoren aus V_+ und V_- an.

(b) Zeigen Sie, dass V_+ und V_- lineare Teilräume von $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind.

(c) Zeigen Sie $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_+ \oplus V_-$.