Lineare Algebra 1
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
17. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Für den Minitest sollten Sie höchstens 15 Minuten brauchen.

(a) Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Ausdrücke sind dann definiert?
[ ] AB, [ ] BA, [ ] $A+B$, [ ] CD,
[ ] DC, [ ] C^2, [ ] D^2.
Berechnen Sie die definierten Ausdrücke.

(b) Welche der folgenden Gleichungen gelten für beliebige $n \times n$-Matrizen A, B und die Einheitsmatrix E_n?
[ ] $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, [ ] $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$,
[ ] $(A+E_n)(A-E_n) = A^2 - E_n$.

(c) Bestimmen Sie den Real und Imaginärteil von $z_1 + z_3$, $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für die komplexen Zahlen

$$z_1 := 3 + 4i, \qquad z_2 := -2 + i, \qquad z_3 := 7 - i.$$

Aufgabe G2 (Fingerübungen in Körpern)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{K}$:

(a) $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$,
(b) $a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \vee b = 0)$,
(c) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$,
(d) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Aufgabe G3
Man sagt, dass zwei quadratische Matrizen A, B *kommutieren*, falls $AB = BA$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Gilt $AB = 0$ für zwei Matrizen A, B, so folgt $A = 0$ oder $B = 0$.
(b) Diagonalmatrizen kommutieren mit allen Matrizen der gleichen Größe.
(c) Diagonalmatrizen der gleichen Größe kommutieren.

Aufgabe G4 (Zusatzaufgabe, Der Ring der Ganzen Gauß'schen Zahlen)
Betrachten Sie die folgende Teilmengen komplexer Zahlen:

$$\mathbb{Z}[i] := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\} .$$

(a) Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(b) Besitzt $\mathbb{Z}[i]$ Nullteiler?

(c) Ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Körper? Welche Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ besitzen ein multiplikatives Inverses?

Hausübung

Aufgabe H1 (Fingerübungen in Vektorräumen) (4 Punkte)
Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$: [1]

(a) $0 \cdot v = 0$ und $\lambda \cdot 0 = 0$.

(b) $(-1) \cdot v = (-v)$.

(c) Gilt $\lambda \cdot v = 0$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = 0$.

Aufgabe H2 (4 Punkte)
Welche Matrizen kommutieren mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe H3 (Funktionen- und Folgenräume) (4 Punkte)
Sei M eine beliebige Menge mit mindestens 2 Elementen. Wir bezeichnen mit $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$. Wir definieren auf $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ eine Addition und Skalarmultiplikation durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) , \qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) , \qquad x \in M$$

für alle $f, g \in \mathscr{F}(M, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ bildet mit den obigen Verknüpfungen einen Vektorraum.

(b) Finden einen Untervektorraum von $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$, der nicht $\{0\}$ oder $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ selbst ist (mit Nachweis).

[1] Man beachte, dass das Symbol 0 für verschiedene neutrale Elemente verwendet wird, nämlich $0 \in \mathbb{K}$ (Skalar) und $0 \in V$ (Nullvektor).