Lineare Algebra 1
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
10.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv.

(b) Der Kern von f ist trivial, d.h. $f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}$.

Aufgabe G2
Seien S_1, S_2 zwei Halbgruppen. Zeigen Sie: Für einen bijektiven Homomorphismus $f : S_1 \to S_2$ ist die Umkehrabbildung wieder ein Homomorphismus.

Aufgabe G3 (Fingerübungen)
Sei R ein Ring, sodass mit $a^2 = a$ für jedes $a \in R$. Zeigen Sie:

(a) $a + a = 0$ für alle $a \in R$.

(b) R ist kommutativ.

(c) Hat R eine Eins, so ist jedes Element $a \neq 1$ ein Nullteiler.

Hinweis: Für $a, b \in R$ betrachten Sie das Element $(a + b)^2$.

Aufgabe G4
Sei G ein Gruppe. Zeigen Sie: Für eine nicht-leere Teilmenge $H \subseteq G$ sind äquivalent:

(a) H ist eine Untergruppe von G.

(b) Für alle $a, b \in H$ gilt auch $ab^{-1} \in H$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Untergruppen von $\mathbb{Z}$) (4 Punkte)
Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $k\mathbb{Z} := \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von dieser Form ist.

Aufgabe H2 (Translationen und Konjugationen) (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Wir bezeichnen mit $S(G)$ die Menge der Permutationen (bijektiven Selbstabbildungen) von G.

(a) (Ohne Wertung) Machen Sie sich klar, dass $S(G)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen ist. Was ist das neutrale Element?

(b) Für ein Element $g \in G$ betrachten wir die Abbildung $\lambda_g : G \to G$, $\lambda_g(x) := gx$. Zeigen Sie:
   i. λ_g ist bijektiv. Was ist die Umkehrabbildung λ_g^{-1}?
   ii. Die Abbildung $\lambda : G \to S(G)$, $g \mapsto \lambda_g$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

   Die Abbildung λ_g heißt auch *Linkstranslationen* um g. Der Homomorphismus $g \mapsto \lambda_g$ heißt auch die *linksreguläre Darstellung* von G.

(c) Für eine Element $g \in G$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_g : G \to G$, $\varphi_g(x) := gxg^{-1}$. Zeigen Sie:
   i. φ_g ist ein Automorphismus. Was ist die Umkehrabbildung φ_g^{-1}?
   ii. Die Abbildung $\varphi : G \to S(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Wann ist dies Abbildung injektiv?

   Die Abbildung φ_g heißt auch *Konjugation* mit g. Der Homomorphismus $g \mapsto \varphi_g$ heißt oft auch die *adjunkte Darstellung* oder *adjungierte Darstellung* von G.

Aufgabe H3 (Erzeugte Untergruppen) (4 Punkte)
Sei G eine beliebige Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Beliebige Schnitte von Untergruppen sind wieder Untergruppen.
   Genauer: Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen $G_i \subseteq G$. Dann ist auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} G_i$ eine Untergruppe von G.

(b) Sei $S \neq \emptyset$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen mit $\langle S \rangle$ den Schnitt über alle Untergruppen $H \subseteq G$ mit $S \subseteq H$:

$$\langle S \rangle := \bigcap_{S \subseteq H \subseteq G \text{ Untergruppe}} H \,.$$

   Zeigen Sie mit Hilfe von (a):
   i. $\langle S \rangle$ ist eine Untergruppe von G mit $S \subseteq \langle S \rangle$.
   ii. Für jede Untergruppe $H \subseteq G$ mit $S \subseteq H$ gilt $\langle S \rangle \subseteq H$.

   Das heißt $\langle S \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die S enthält. Die Menge $\langle S \rangle$ heißt die von S erzeugte Untergruppe.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle S \rangle$ genau aus den Produkten von Elementen von S und deren Inversen besteht, d.h.

$$\langle S \rangle = \{ g_1 g_2 \dots g_n \mid n \in \mathbb{N},\ \forall 1 \leq k \leq n.\ g_k \in S \text{ oder } g_k^{-1} \in S \} \,.$$