Lineare Algebra 1
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
04.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wobei handelt es sich um ein Monoid bzw. eine Gruppe?

	$(\mathbb{R}^n, +, 0)$	$(\mathbb{R}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$	$(\mathbb{N}, +, 0)$	$(\mathbb{Z}, -, 0)$
Monoid						
Gruppe						

Welche der folgenden Mengen sind mit der angegebenen Verknüpfung Gruppen? Was ist ggf. das neutrale Element? Welche Verknüpfungen sind assoziativ, welche sind kommutativ?

(a) $(\mathbb{Q}, *)$ mit $a * b := a + 2b$,
(b) $(\mathbb{N}, *)$ mit $a * b := \min(a, b)$,
(c) $(\mathbb{Q}, *)$ mit $a * b := \frac{1}{2}(a + b)$.
(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ mit $a * b := 2ab$.

Aufgabe G2 (Fingerübungen)

(a) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in G$ die sog. *Kürzungsregel* gilt:

$$ac = bc \qquad \Longrightarrow \qquad a = b\,.$$

(b) Finden Sie ein Monoid, in welchem die Kürzungsregel gilt, das aber keine Gruppe ist.

(c) Finden Sie ein Monoid, in welchem die Kürzungsregel nicht gilt.

Aufgabe G3 (Permutationen)
Betrachten Sie die beiden Permutationen

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Veranschaulichen Sie die Permutationen π und σ jeweils durch Zeichnungen mit acht Punkten.

(b) Berechnen Sie π^{-1}, σ^{-1}, π^2, π^3, σ^2 und σ^3.

Aufgabe G4 (Die Diedergruppe)
Sei $n \geq 3$. Wir betrachten ein gleichseitiges n-Eck mit den Eckpunkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Die Diedergruppe D_n ist die Menge aller (längenerhaltenden) bijektive Transformationen, die das n-Eck wieder in sich überführen (z.B. Spiegelungen oder Drehungen).

(a) Machen Sie sich klar, dass D_n eine Gruppe bildet.

(b) In den Übungen haben wir bereits gesehen, dass die Menge $S(M)$ der Permutationen von $M := \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Gruppe bildet. Wie lässt sich eine Transformation in D_n eindeutig als Permutation der Eckpunkte $p_1, \dots, p_n$ darstellen? Folgern Sie, dass sich D_n als Untergruppe von $S(M)$ auffassen lässt.

(c) Gilt $D_n = S(M)$?

(d) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

(e) (offene Aufgabe) Finden Sie eine möglichst große echte Untergruppe von D_n. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe abelsch ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Sei M eine beliebige Menge. Besonders einfach sind die folgenden Permutationen von M:

$$a_1 \mapsto a_2\,, \qquad a_2 \mapsto a_3\,, \qquad \dots \qquad a_k \mapsto a_1$$

mit paarweise verschiedenen Elementen $a_1, \dots, a_k \in M$, wobei die übrigen Elemente von M nicht bewegt werden. Für eine solche Permutation schreiben wir auch $(a_1\, a_2 \dots a_k)$ und nennen sie einen *Zyklus*.

(a) (Ohne Wertung) Machen Sie sich klar, dass $(a_1\, a_2 \dots a_k) = (a_2\, a_3 \dots a_k\, a_1)$ gilt.

(b) Berechnen Sie die inverse Permutation zu $(1\,3\,5\,7)$ und allgemeiner zu einem Zyklus $\tau = (a_1 \dots a_k)$.

(c) Berechnen Sie $(1\,2\,3) \circ (2\,4)$ und $(2\,4) \circ (1\,2\,3)$.

Man kann zeigen, dass sich jede Permutation auf M als ein Produkt (Komposition) von Zyklen schreiben lässt.

(d) Stellen Sie die Permutationen aus Aufgabe G3(1) als Produkt (Komposition) von Zyklen dar.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

(a) In jeder Zeile und jeder Spalte der folgenden Verküpfungstafel kommt jedes Element genau einmal vor. Trotzdem handelt es sich nicht um eine Gruppentafel. Warum nicht?

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

(b) Seien $s, t \in \mathbb{Z}$. Man betrachte auf $\mathbb{Z}$ die Verknüpfung $\odot$ mit

$$a \odot b := sa + tb$$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. Für welche s, t ist diese Verknüpfung assoziativ bzw. kommutativ?

Aufgabe H3 (Isometriegruppen) (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^n$ der n-Tupel reeller Zahlen mit der euklidischen Länge

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *längenerhaltend* oder auch eine *Isometrie*, falls

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(a) Geben Sie mindestens drei Isometrien des $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ aller bijektiven Isometrien des $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Ist $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ abelsch?