Lineare Algebra 1
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
26.10.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Welche der folgenden Mengen sind gleich?

i. $\{1,2\}$, ii. $\{(1,2)\}$, iii. $\{1,\{1,2\}\}$, iv. $\{1,2,\{1,2\}\}$.

(b) Existieren Funktionen der folgenden Art?

[ ] $\mathbb{Z} \to \emptyset$, [ ] $\emptyset \to \emptyset$, [ ] $\emptyset \to \mathbb{Z}$.

(c) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn

[ ] $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\, f(x) = y$. [ ] $(\exists y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y$.
[ ] $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y$. [ ] $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, f(x) = y$.

(d) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn

[ ] $(\forall x, x' \in X)\, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. [ ] $(\forall x, x' \in X)\, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$.
[ ] $(\forall x, x' \in X)\, x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. [ ] $(\forall x, x' \in X)\, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Aufgabe G2

Sei X eine Menge und $\{M_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Mengen. Zeigen Sie

$$X \cap \Big(\bigcup_{j\in J} M_j\Big) = \bigcup_{j\in J}(X \cap M_j)\,, \qquad X \cup \Big(\bigcap_{j\in J} M_j\Big) = \bigcap_{j\in J}(X \cup M_j)\,.$$

Aufgabe G3 (Einfache Potenzmengen)

Schreiben alle Elemente der Potenzmenge von

(a) $X := \emptyset$, (b) $X := \{a\}$, (c) $X := \{a, b\}$, (d) $X := \{a, b, c\}$,
(e) der Potenzmenge von $X := \{a, b\}$.

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer n-elementigen Menge für $n = 0, 1, 2, 3$. Ist die Potenzmenge von X größer als X, kleiner oder gleich groß?

Aufgabe G4 (Eigenschaften von Relationen)

Sei M eine Menge. Eine Relation R über $M \times M$ kann folgende Eigenschaften haben:

(a) *reflexiv:* $\forall x \in M : xRx$

(b) *symmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : xRy \Rightarrow yRx$

(c) *transitiv:* $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

(d) *antisymmetrisch:* $\forall x \in M : \forall y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, welche der obigen Eigenschaften zutreffen.

(a) Sei M die Menge der Einwohner Darmstadts und R die Relation „x wohnt im selben Stadtteil wie y".

(b) Sei $M = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und sei R die Relation „x ist kleiner oder gleich y".

(c) Sei $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und sei R die Relation „x ist Teiler von y".

(d) Sei $M = \mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ die Menge aller Teilmengen von $\{1,2\}$ und sei R die Relation „x ist Teilmenge von y".

Eine Relation auf $M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist; sie heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Ein Halbordnung, die total ist, heißt *lineare Ordnung*. Entscheiden Sie, welche der drei genannten Begriffe auf die obigen Beispiele von Relationen zutreffen.

Aufgabe G5
Sei $f : M \to N$ eine Funktion und seien A und B Teilmengen von M. Beweisen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Geben Sie ein Beispiel mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Hausübung

Aufgabe H1
Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $C \subseteq Y$ definieren wir

$$f^{-1}(C) := \{x \in X \mid f(x) \in C\} .$$

Zeigen Sie für beliebige Teilmengen $C, D \subseteq Y$:

(a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

(b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Aufgabe H2 (Verknüpfung von Funktionen)
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Wir definieren

$$g \circ f := \{(x,z) \in X \times Z \, ; \, \exists y \in Y : (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g\} .$$

Zeigen Sie:

(a) $g \circ f$ ist eine Funktion $g \circ f : X \to Y$, und für alle $x \in X$ gilt $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

(b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

(c) Finden Sie ein Beispiel, sodass $g \circ f$ nicht bijektiv ist, obwohl f injektiv und g surjektiv ist.

(d) Finden Sie ein Beispiel, damit $g \circ f$ bijektiv ist, obwohl f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv ist.

Aufgabe H3
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(a) f ist bijektiv.

(b) Es gibt eine Funktion $g : Y \to X$, sodass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$x = (g \circ f)(x) , \qquad y = (f \circ g)(y) .$$