Lineare Algebra 1
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
20.10.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Politik)
Ein Politiker wird in einem Wahlkampf gefragt, ob er für oder gegen das Verbot von Alkohol ist. Da er sich um eine Antwort drücken will, sagt er: „Ich habe mich stets gegen die Absicht gewandt, die Gegner der Bekämpfung der Antialkoholbewegung zu unterdrücken.“ Ist der Mann für oder gegen das Alkoholverbot?

Aufgabe G2 (Äquivalenz in der Aussagenlogik)
Welche der folgenden aussagelogischen Formeln sind allgemein gültig? Welche sind immer falsch?

(a) $p \vee \neg p$ (b) $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$ (c) $p \wedge \neg p$ (d) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Aufgabe G3
Seien M eine Menge und A, B und C Teilmengen von M.

(a) Beweisen Sie $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.

(b) Vervollständigen und beweisen Sie $A \cup \emptyset =?$ und $A \cap \emptyset =?$.

(c) Vergleichen Sie $(A \cup B) \cup C$ und $A \cup (B \cup C)$. Welche einfachere Notation kann man daraus herleiten?

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

Aufgabe G4
Sei M eine Menge. Drücken Sie die Negationen der folgenden Aussagen so aus, dass die Negationssymbole so weit rechts wie möglich stehen:

(a) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)\, P(x, y)$,

(b) $(\forall x \in M)\, P(x) \vee \big((\forall y \in M)\, Q(y)\big)$,

(c) $(\forall x \in M)\, P(x) \vee \big((\exists y \in M)\, Q(x, y) \wedge R(y)\big)$,

(d) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)\, \big(P(y) \Rightarrow y = y\big)$.

Aufgabe G5 (Kartesisches Produkt)

(a) Was sind die Elemente des Produkts $(\{1,2,3\} \times \{4,5\})$?

(b) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \{0\}$?

(c) Sei A eine Menge mit n Elemente. Wie viele Elemente gibt es in $A \times \{3\}$?

(d) Was sind die Elemente des Produkts $\{1,2,3\} \times \emptyset$? Was ist eigentlich die Menge $\{1,2,3\} \times \emptyset$?

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Aussagen als „umgangssprachliche" Sätze. Welche der Aussagen gelten in den natürlichen Zahlen? Begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\ n = k^2$,

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\ n^2 = k$,

(c) $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2 = k$,

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})\big(((\exists k \in \mathbb{N})\ n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 5k\big)$.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Seien M eine beliebige Menge und $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) (De Morganschen Regeln)

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)\,, \qquad M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)\,.$$

(b) Ist $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$, so gilt $A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe H3 (Mengenlehre) (4 Punkte)

Die symmetrische Differenz zweier Teilmengen A, B einer Menge M ist definiert als

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(a) Veranschaulichen Sie die Definition der symmetrischen Differenz durch eine Skizze.

(b) Zeigen Sie nun formal, dass für zwei Teilmengen A, B einer Menge M gilt:

i. Kommutativität: $A \triangle B = B \triangle A$

ii. Neutrales Element: $A \triangle \emptyset = A$

iii. Inverses Element: $A \triangle A = \emptyset$