Lineare Algebra 1
14. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
2. Februar 2012

Als Hausübung zu diesem Übungsblatt können Sie die Klausur aus dem letzten Semester als **Probeklausur** rechnen. Wir empfehlen Ihnen, die Klausur unter möglichst realistischen Bedingungen zu bearbeiten. Beachten Sie auch das Blatt mit den Anmerkungen zur Probeklausur.
In der 15. Übung wird es kein Übungsblatt geben. Dort bieten wir Ihnen die Gelegenheit, die Aufgaben der Probeklausur zu besprechen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ ist

☐ 0, ☐ λ, ☐ λ^3, ☐ 9λ, ☐ λ^9, ☐ $9\lambda^9$.

Lösungshinweise: 0.

Aufgabe G2 (Übungsmaterial zur Berechnung von Determinanten)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \alpha\cdot\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -\alpha^2\cdot\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise:

(a)

$$\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \sin\alpha\cdot\sin\alpha - (-\cos\alpha\cdot\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(b)

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} &= 1\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 1\cdot 5\cdot 3 \\ &= -2 + 10 - 3 - 4 - 1 - 15 = -15 \end{aligned}$$

(c)

$$\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\cdot\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\cdot\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot 1 + \cos\alpha\cdot(-a^2\sin\alpha)\cdot 0 + a\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot 0$$

$$-a\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot 0 - \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot 1 - \sin\alpha\cdot(-a^2\sin\alpha)\cdot 0$$

$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(d)

$$\det\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = -1$$

Aufgabe G3

(a) Sei $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ der Raum aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens 3. Betrachten Sie den Endomorphismus

$$\varphi : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \quad \varphi(p)(t) := p(1-t)\,.$$

Bestimmen Sie die Determinante von φ.

(b) Bestimmen Sie die Determinante der orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^3$ auf die durch die folgende Gleichung gegebenen Ebene:

$$\sin(11)\cdot x + \cos(13)\cdot y + \tan(17)\cdot z = 0\,.$$

(c) Bestimmen Sie die Determinante einer orthogonalen Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ an der durch die folgende Gleichung gegebenen Ebene:

$$\pi\cdot x + \cos(\sqrt{2})\cdot y + e^{\pi}\cdot z = 0\,.$$

Lösungshinweise:

(a) Man könnte die Matrix von φ bzgl. der Monombasis aufstellen und dann die Determinante dieser Matrix berechnen. Geeigneter für die Berechnung ist die Basis aus den (Eigen-)Vektoren 1,$(x-\frac{1}{2})$, $(x-\frac{1}{2})^2$ und $(x-\frac{1}{2})^3$. (Die Abbildung φ spiegelt die Funktionen an der um $\frac{1}{2}$ verschobenen Geraden parallel zur y-Achse.) Bezüglich dieser Basis ist die Matrix von φ eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $(1,-1,1,-1)$, also $\det\varphi = 1$.

(b) (Die Ebenengleichung ignorieren wir.) Die Projektion auf die Ebene hat einen Kern, nämlich alle Normalenvektoren. Insbesondere ist die Abbildung nicht invertierbar, hat also Determinante 0. (Nach unserer Argumentation gilt das für jede nicht-triviale Projektion.)

(c) (Die Ebenengleichung ignorieren wir.) Als Basis wählen wir zwei linear unabhängige Vektoren der Ebene und einen Normalenvektor der Ebene. Die Matrix der Spiegelung ist bzgl. dieser Basis eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1,1,-1)$. Also hat die Spiegelung Determinante -1. (Nach unserer Argumentation gilt das für jede Spiegelung an einer Ebenen.)

Aufgabe G4 (Cramersche Regel)
Sei $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ eine invertierbare, reelle $(n \times n)$-Matrix und $b = (b_1, \dots, b_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen in dieser Aufgabe eine explizite Formel für die Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ des Gleichungssystems $Ax = b$ finden. Wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$ lösen. Hierzu betrachten wir für $1 \leq j \leq n$ die Matrix $X_j := (e_1, \dots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \dots, e_n)$, die aus der Einheitsmatrix entsteht, indem man in der Einheitsmatrix die j-te Spalte durch x ersetzt.

(a) Zeigen Sie: Die Matrix $B_j := A \cdot X_j$ hat folgende Gestalt:

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

d.h. B_j entsteht, indem man in A die j-te Spalte durch b ersetzt.

(b) Berechnen Sie die Determinante von X_j und folgern Sie

$$x_j = \det(B_j)/\det(A)\,.$$

Diese Gleichung heißt auch die *Cramersche Regel*.

(c) Mit Hilfe der Cramerschen Regel lässt sich auch die Inverse von A explizit bestimmt. Leiten Sie eine explizite Formel für die Einträg von A^{-1} her.

Lösungshinweise:

(a) Nachrechnen.

(b) Mit $\det(X_j) = x_j$ folgt $\det(B_j) = \det(A) \cdot \det(X_j) = \det(A) \cdot x_j$.

(c) Die j-te Spalte der Inversen A^{-1} ist die Lösung des Gleichungssystemes $Ax = e_j$. Nach dem vorherigen Aufgabenteil sind damit die Einträge $(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} := A^{-1}$ der Inversen gegeben durch

$$c_{i,j} = \det(A_{j,i})/\det A\,,$$

wobei die Matrix $A_{j,i}$ aus A entsteht, indem man die j-te Zeile und i Spalte entfernt.