Lineare Algebra 1
13. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
26. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Triviale Quotienten)
Sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$f_1 : V \to V, \quad v \mapsto v\,, \qquad\qquad f_2 : V \to V, \quad v \mapsto 0\,.$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass es zugehörige lineare Abbildung $\tilde{f}_1 : V/\ker f_1 \to V$ und $\tilde{f}_2 : V/\ker f_2 \to V$ gibt. Die Isomorphie welcher Vektorräume kann man daraus schließen?

Lösungshinweise: Offensichtlich gilt $\ker f_1 = \{\vec{0}\}$, $\mathrm{im}\varphi_1 = V$, $\ker f_2 = V$ und $\mathrm{im} f_2 = \{\vec{0}\}$. Aus dem Homomorphiesatz ergeben sich direkt die Abbildungsvorschriften:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 : V/\{\vec{0}\} \to V, &\qquad \vec{v} + \{\vec{0}\} \mapsto f_1(\vec{v}) = \vec{v} \\ \tilde{f}_2 : V/V \to \{\vec{0}\}, &\qquad \vec{v} + V \mapsto f_2(\vec{v}) = \vec{0}\,. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $V/\{\vec{0}\}$ isomorph zu V ist und dass V/V isomorph zu $\{\vec{0}\}$ ist.

Aufgabe G2 (Quotienten und Affine Teilräume)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und den vom Vektor $(1,-1)^T$ aufgespannten linearen Teilraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie die affinen Teilräume $\binom{1}{0} + U$, $\binom{2}{0} + U$ und $\binom{1}{1} + U$.

(b) Zeigen Sie: Für jeden Vektor $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\binom{a}{b} + U = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = a + b \right\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : V/U \to \mathbb{R}, \quad \binom{a}{b} + U \mapsto a + b$$

ein wohldefinierter Vektorraum-Isomorphismus ist. Wie lässt sich diese Abbildung anhand Ihrer Skizze interpretieren?

Lösungshinweise:

(a) Im $\mathbb{R}^2$ ist U eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung -1.
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + U$ ist die zu U parallele Gerade, die die y-Achse in 1 schneidet.
$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + U$ sind gleich. Es handelt sich bei ihnen um die zu U parallele Gerade, die die y-Achse in 2 schneidet.

(b) Ein Element $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U$ hat nach Definition die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda \\ b-\lambda \end{pmatrix}$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. D.h. es folgt insbesondere $x + y = a + \lambda + b - \lambda = a + b$. Also ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}$$

und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\} .$$

Andererseits gilt für ein Element $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}$ auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-a \\ -(x-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (x-a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U .$$

D.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\} .$$

Insgesamt ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\} .$$

(c) Für $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} + U$$

folgt $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x + y = a + b \right\}$ und damit

$$a' + b' = a + b$$

und

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U \right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} + U \right) = a + b .$$

D.h. die Abbildungsvorschrift von φ ist unabhängig von Wahl des Repräsentanten der affinen Unterräume. φ ist also wohldefiniert.
Für $a_1, b_1, a_2, b_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi\left(\lambda_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + U \right) + \lambda_2 \left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + U \right) \right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} + U \right) \\ &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ &= \lambda_1 (a_1 + b_1) + \lambda_2 (a_2 + b_2) \\ &= \lambda_1 \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + U \right) + \lambda_2 \varphi\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + U \right) \end{aligned}$$

D.h. φ ist linear.
Für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + U\right) = x + 0 = x\,.$$

D.h. φ ist surjektiv.
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist genau dann in $\ker\varphi$, wenn $a + b = 0$ gilt, d.h. wenn

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x + y = 0 \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U$$

ist. Es folgt also

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U \right\} = \{\vec{0}\}\,,$$

wobei die letzte Null das Nullelement in V/U bezeichnet.
D.h. φ ist injektiv.
Insgesamt ist φ also eine wohldefinierte, bijektive, lineare Abbildung, also ein Vektorraumisomorphismus.

(d) Eine mögliche Interpretation ist folgende:
Man kann $\mathbb{R}$ mit der y-Achse im $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Dann bildet die Abbildung φ einen affinen Unterraum (der ja eine zu U parallele Gerade ist) auf dessen Schnittpunkt mit der y-Achse ab.

Aufgabe G3
Seien V_1, V_2 Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$ jeweils lineare Teilräume. Sei $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. Wann ist die Abbildung

$$F : V_1/U_1 \to V_2/U_2, \quad F(v + U_1) = f(v) + U_2$$

für alle $v \in V_1$ wohldefiniert? Finden Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

Lösungshinweise: Wir zeigen, dass F genau dann wohldefiniert ist, wenn $f(U_1) \subseteq U_2$ gilt.
Sei zuerst F wohldefiniert. Dann sind für jeden Vektor $v \in U_1$ die Elemente $v + U_1$ und U_1 im Quotienten V/U_1 gleich. Also gilt

$$f(v_1) = F(v + U_1) = F(U_1) = U_2\,,$$

d.h. $f(v_1) \in U_2$.
Umgekehrt: Es gelte $f(U_1) \subseteq U_2$. Seien $v + U_1 = w + U_1$ zwei gleiche Elemente im Quotienten mit $v, w \in V_1$. Dann gilt $v - w \in U_1$ (siehe 10. Übung, Aufgabe H4). Es folgt $f(v) - f(w) = f(v - w) \in U_2$. Also sind die Elemente $F(v + U_1) = f(v) + U_2$ und $F(w + U_2) = f(w) \in U_2$ im Quotienten V_2/U_2 gleich.

Hausübung

Aufgabe H1 (Duale Räume)
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $W \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Wir bezeichnen mit

$$\pi : V \to V/W, \quad v \mapsto v + W$$

die natürliche Quotientenabbildung. Wir betrachten die Dualräume

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})\,, \qquad\qquad (V/W)^* = \mathrm{Hom}(V/W, \mathbb{K})\,.$$

und die zu π gehörige duale Abbildung

$$\pi^* : (V/W)^* \to V^*, \quad \omega \mapsto \omega \circ \pi\,.$$

(a) Machen Sie sich klar, dass π^* eine wohldefinierte, lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung π^* injektiv ist.

(c) Das Bild $\pi^*\big((V/W)^*\big)$ ist ein Untervektorraum von V^*. Wie groß ist die Dimension des Quotientenvektorraumes

$$V^*/\pi^*\big((V/W)^*\big) \ ?$$

Lösungshinweise:

(b) Die Quotientenabbildung π ist surjektiv. Die Behauptung folgt dann aus Aufgabe H1 der 12. Übung.

(c) Wir setzen $n := \dim V$ und $k := \dim W$. Der Dualraum V^* hat die gleiche Dimension wie V. Der Quotient V/W die Dimension $n-k$. Der Dualraum $(V/W)^*$ hat dieselbe Dimension wie V/W. Weil π^* injektiv ist, hat auch das Bild $\pi^*\big((V/W)^*\big)$ die Dimension $n-k$. Somit hat der Quotient

$$V^*/\pi^*\big((V/W)^*\big)$$

die Dimension $n-(n-k)=k$.

Aufgabe H2 (Quotient vs. Komplement)
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Erinnern Sie sich, dass es einen Untervektorraum $W \subseteq V$ gibt mit $V = U \oplus W$. (Warum nochmal? Vgl. 7. Übung, Aufgabe G2). Zeigen Sie: Für jeden Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$ ist der Vektorraum W isomorph zum Quotienten V/U.

Lösungshinweise: Wir zeigen, dass die Einschränkung der Quotientenabbildung $\varphi := q|_W : W \to U/V$ einen Isomorphismus liefert. Zuerst Surjektivität: Die Quotientenabbildung $q : V \to V/U$ ist surjektiv. Außerdem gilt für jeden Vektor $u+w$ in V mit $u \in U$, $w \in W$

$$q(u+w) = 0 + q(w) = q(w)\,.$$

Somit ist $\varphi(W) = q(W) = q(V) = V/U$, d.h. die φ ist surjektiv. Injektivität: Sei $w \in W$ mit $0 = \varphi(w)$, d.h. $w \in U$. Wegen $U \cap W = \{0\}$ muss dann $w = 0$ gelten. Also hat φ trivialen Kern, ist somit injektiv.

Aufgabe H3 (Quotienten in Funktionenräumen)
Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Teilmenge

$$U := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1]: \quad f(x) = 0\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass U ein linearer Teilraum von $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie: Der Quotientenvektorraum $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})/U$ ist isomorph zum Vektorraum $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ aller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Lösungshinweise:

(b) Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$, die jede Funktion entsprechend einschränkt, d.h. $\varphi(f) := f|_{[0,1]}$. Diese Abbildung ist surjektiv, denn jede Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lässt sich auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, z.B. durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) := \begin{cases} f(t) & \text{, falls } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter liegt eine Funktion $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ genau dann im Kern von φ, wenn f auf dem Intervall $[0,1]$ verschwindet, d.h. es gilt

$$\ker f = U\,.$$

Nach dem Homomorphiesatz folgt dann, dass die Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})/U \to \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ mit $\tilde{\varphi}(f+U) := \varphi(f)$ ein Isomorphismus ist.