Lineare Algebra 1
12. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
26. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei V der reelle Vektorraum, der von den Funktionen in $\mathscr{B} := (f_1, \ldots, f_5)$, $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f_1(t) := \sin(t)\,, \qquad f_2(t) := \cos(t)\,, \qquad f_3(t) := \sin(t) \cdot \cos(t)\,, \qquad f_4(t) := \sin^2(t)\,, \qquad f_5(t) := \cos^2(t)$$

aufgespannt wird. Wir betrachten die Ableitung $\varphi : V \to V$, $f \mapsto f'$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}$ eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_B^B$.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes von φ.

Lösungshinweise:

a) Es ist nur die lineare Unabhängigkeit der Elemente aus $\mathcal{B}$ zu zeigen. Seien dazu $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \sin + \lambda_2 \cdot \cos + \lambda_3 \cdot \sin \cdot \cos + \lambda_4 \cdot \sin^2 + \lambda_5 \cdot \cos^2 = 0$$

(beachte, dass 0 hier die Nullabbildung bezeichnet). Durch Einsetzen geeigneter Werte, $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \frac{3\pi}{2}$ und $x_5 = \frac{\pi}{4}$, erhalten wir ein System aus fünf Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie man der Matrix ansieht, sind die Zeilen linear unabhängig und es existiert nur die triviale Lösung.

b) Die Matrix $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist bestimmt durch die Bilder der Basis $\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= \sin' &&= \cos &&= 1 \cdot b_2, \\ \varphi(b_2) &= \cos' &&= -\sin &&= -1 \cdot b_1, \\ \varphi(b_3) &= (\sin \cdot \cos)' &&= \cos^2 - \sin^2 &&= -1 \cdot b_4 + 1 \cdot b_5, \\ \varphi(b_4) &= (\sin^2)' &&= 2 \sin \cdot \cos &&= 2 \cdot b_3, \\ \varphi(b_5) &= (\cos^2)' &&= -2 \sin \cdot \cos &&= -2 \cdot b_3. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Durch Umformen der Spalten (bzw. der Zeilen, wenn man die Matrix vorher transponiert, wie im Skript angegeben) lässt sich eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ bestimmen. Wie man der Matrix $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ansieht, sind die vierte und die fünfte Spalte linear abhängig. Somit ist eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ gegeben durch $(\cos, -\sin, -\sin^2 + \cos^2, 2 \sin \cos)$. Aus den letzten beiden Spalten ist ebenso abzulesen, dass nur $\sin^2 + \cos^2$ (und skalare Vielfache davon) im Kern $\ker(\varphi)$ liegt. Somit ist $\ker(\varphi) = \operatorname{span}(b_4 + b_5)$.

Aufgabe G2

Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Matrizen $v_i v_j^t$, $1 \leq i, j \leq n$, in $M_n(\mathbb{R})$ sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Lösungshinweise: Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, so lässt sich einer der Vektoren als Linearkombination der übrigen Darstellen. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass sich v_1 als Linearkombination von $v_2, \ldots, v_n$ darstellen lässt, d.h. es gibt $\mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n .$$

Dann gilt

$$v_1 v_j^t = \mu_2 v_2 v_j^t + \cdots + \mu_n v_n v_j^T .$$

Also sind auch die Matrizen $v_1 v_j^t$ mit $1 \leq j \leq n$ linear abhängig, damit erst recht $v_i v_j^t$ mit $1 \leq i, j \leq n$.
Umgekehrt seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{R})$ mit $S v_i = e_i$ für jedes $1 \leq i \leq n$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Es folgt

$$S v_i v_j^t S^t = (S v_i)(S v_j)^t = e_i e_j^t = E_{i,j} ,$$

wobei $E_{i,j}$ die Matrix mit einer 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet und sonst Nulleneinträgen bezeichnet. Die Matrizen $E_{i,j}$ sind linear unabängig. Daraus folgt, dass auch $v_i v_j^t$ linear unabhängig sind: Ist nämlich $\sum_{i,j=1}^n \mu_{i,j} v_i v_j^t = 0$, so folgt auch $0 = S\left(\sum_{i,j=1}^n \mu_{i,j} v_i v_j^t\right) S^t = \sum_{i,j=1}^n \mu_{i,j} E_{i,j}$ und somit $\mu_{i,j} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe G3

Wir betrachten den Ring $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Für eine Teilmenge $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ heißt die Menge

$$S' := \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in S : \quad AB = BA\}$$

die *Kommutante* von S.

(a) Zeigen Sie, dass die Kommutante S' einer beliebigen Teilmenge $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum ist, der unter Multiplikation abgeschlossen ist. (Ein solcher Teilraum heißt auch *Unteralgebra* von $M_n(\mathbb{R})$.)

(b) Sei $\mathcal{D}_n \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Diagonalmatrizen. Zeigen Sie $\mathcal{D}_n' = \mathcal{D}_n$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kommutante $M_n(\mathbb{R})'$ genau aus den skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix besteht.

(d) Sei $0 < k < n$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{A}$ die Menge aller Blockmatrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $A_1 \in M_k(\mathbb{R})$ und $A_2 \in M_{n-k}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Kommutante von $\mathscr{A}$.

Lösungshinweise:

(a) Einfach nachrechnen.

(b) Klar ist, dass alle Diagonalmatrizen kommutieren, also $\mathscr{D}_n' \supseteq D_n$. Sei $B =: (b_{i,j})_{i,j}$ eine Matrix in der Kommutante $\mathscr{D}_n'$. Wir zeigen, dass $b_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt. Seien also $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$. Sei A die Diagonalmatrix, die nur in der i-ten Zeile/Spalte eine Eins hat und sonst Nullen als Einträge hat. Dann gilt für den Eintrag der Matrix $C := AB = BA$ an der i-ten Zeilen, j-te Spalte zum einen

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,j} b_{i,j} = b_{i,j}$$

zum anderen

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = 0\,,$$

also $b_{i,j} = 0$.

(c) Klar ist, dass alle Vielfachen der Einheitsmatrix tatsächlich in der Kommutante $M_n(\mathbb{R})'$ liegen. Weiter gilt (klar!): Ist $S_1 \subseteq S_2$, so gilt $S_2' \subseteq S_1'$. Nach dem vorherigen Aufgabenteil besteht damit die Kommutante $M_n(\mathbb{R})'$ nur aus Diagonalmatrizen. Sei also $B =: (b_{i,j})_{i,j}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $b_{i,i} =: \lambda_i$. Bezeichne mit $E_{i,j}$ die Matrix, die nur in der i-ten Zeile, j-ten Spalte eine Eins und sonst Nullen als Eintrag hat. Dann gilt

$$BE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}\,, \qquad\qquad E_{i,j}B = \lambda_j E_{i,j}\,.$$

Liegt B in der Kommutanten $M_n(\mathbb{R})'$, so folgt daraus $\lambda_i = \lambda_j$, d.h. B alle Diagonaleinträge sind gleich.

(d) Die Kommutante von $\mathscr{A}$ enthält alle Blockmatrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_k & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{n-k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit Skalaren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und den entsprechenden Einheitsmatrizen E_k bzw. E_{n-k}. Ist nun umgekehrt

$$B =: \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix in der Kommutanten $\mathscr{A}'$, so gilt für alle $A_1 \in M_k(\mathbb{R})$ und $A_2 \in M_{n-k}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_{1,1} & A_1 B_{1,2} \\ A_2 B_{2,1} & A_2 B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} A_1 & B_{1,2} A_2 \\ B_{2,1} A_1 & B_{2,2} A_2 \end{pmatrix}\,.$$

Insbesondere gilt $A_1 B_{1,1} = B_{1,1} A_1$ und $A_2 B_{2,2} = B_{2,2} A_2$. Nach dem vorherigen Aufgabenteil sind folglich $B_{1,1}$ und $B_{2,2}$ Vielfache der entsprechenden Einheitsmatrix. Für die spezielle Wahl $A_1 := 0$ und $A_2 := E_{n-k}$ folgt weiter $0 = A_1 B_{1,2} = B_{1,2} A_2 = B_{1,2}$ und analog $B_{2,1} = 0$. Insgesamt ist B also tatsächlich von der Form in (1).

Hausübung

Aufgabe H1 (Duale Abbildungen)
Für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W bezeichnen wir mit

$$\varphi^* : W^* \to V^*, \quad \varphi(\omega) := \omega \circ \varphi$$

die duale Abbildung zwischen den Dualräumen V^* und W^*. Zeigen Sie:

(a) Für zwei lineare Abbildungen $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ gilt $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(b) Ist φ surjektiv, so ist φ^* injektiv.

Seien V und W endlich-dimensional. Sei $\mathscr{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathscr{C} := (w_1, \ldots, w_m)$ ein Basis von W. Wir bezeichnen jeweils mit $\mathscr{B}' := (v'_1, \ldots, v'_n)$ und $\mathscr{C}' := (w'_1, \ldots, w'_n)$ die zugehörige duale Basis.

(c) Zeigen Sie für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$: Ist $A = [\varphi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$, so ist $A^t = [\varphi^*]^{\mathscr{C}'}_{\mathscr{B}'}$.

Hierbei bezeichnet A^t die transponierte Matrix zu A.
Die folgenden Zusatzfragen führen zwar um Einiges über den Stoff hinaus. Eine Beschäftigung damit liefert aber u.U. tiefere Einblicke in die Problematik:

(d*) Wie sieht es mit der Umkehrung von (b) aus?

(e*) Folgt aus der Injektivität von φ die Surjektivität von φ^*? Oder umgekehrt?

Lösungshinweise:

(a) $(\psi \circ \varphi)^*(\omega) = \omega \circ (\psi \circ \varphi) = (\omega \circ \psi) \circ \varphi = \varphi^*(\omega \circ \psi) = \varphi^*(\varphi^*(\omega))$.

(b) Sei $\omega \in W^*$ mit $0 = \varphi^*(\omega) = \omega \circ \varphi$. Dann ist jeder Vektor $w \in W$ von der Form $w = \varphi(v)$ für ein $v \in V$, und somit folgt $\omega(w) = (\omega \circ \varphi)(v) = 0$, d.h. $\omega = 0$.

(c) Betrachte die Matrix $[\varphi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} =: (a_{i,j})$. Dann sind die Einträge der Matrix dadurch bestimmt, dass für jedes j gilt

$$\varphi(v_j) = \sum_i a_{i,j} w_j \, .$$

Weil für die duale Basis $w'_i(w_j) = \delta_{i,j}$ gilt, folgt

$$a_{i,j} = w'_i\big(\varphi(v_j)\big) \, .$$

Analog gilt für die Einträge der Matrix $[\varphi^*]^{\mathscr{C}'}_{\mathscr{B}'} =: (b_{i,j})_{i,j}$

$$b_{i,j} = \big(\varphi^*(w'_j)\big)(v_i) \, .$$

Zusammen ergibt sich also $a_{i,j} = b_{j,i}$.

Aufgabe H2
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \\ \beta + 3 \end{pmatrix}$$

lösbar? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

Lösungshinweise: Mit Gauss–Jordan–Algorithmus

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-2 & 0 & -1 & -6 & -2 \\
1 & 3 & 3 & 3 & 5 \\
3 & 1 & 1 & \alpha & -1 \\
1 & 5 & 4 & 0 & \beta+3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
0 & -2 & -2 & \alpha-3 & -4 \\
0 & 4 & 3 & -1 & \beta+2 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-7 & -4 \\
0 & 0 & 1 & 7 & \beta+2 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\
0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \beta-2 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \beta-2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (2-\beta)(\alpha-1)
\end{array}
$$

Wir sehen also, dass das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar ist, falls $\beta = 2$ oder $\alpha = 1$ gilt.
<u>1.Fall $\beta = 2$ (α bel.):</u> Für das homogene System $Ax = 0$ gibt es gibt nur die triviale Lösung $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$.

Als spezielle Lösung erhalten wir $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (welches in diesem Fall die einzige Lösung von $Ax = c$ ist!).

<u>2. Fall $\beta \neq 0$, $\alpha = 1$:</u> Wieder gibt es nur die triviale Lösung $x = 0$ für das homogene System. Die spezielle (und einzige) Lösung des inhomogenen Systems ist $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H3

Wir betrachten den Ring $M_2(\mathbb{R})$ der reellen (2×2)-Matrizen. Erinnern Sie sich, dass die Menge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe bilden. Wir definieren

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \,.$$

Für eine Matrix A heißt der Wert $\det(A)$ die *Determinante* von A.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist. Diese Gruppe heißt auch die *spezielle, lineare Gruppe*.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = E = A \cdot A^t\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist. Diese Gruppe heißt auch die *orthogonale Gruppe*.

(c) Machen Sie sich klar, dass der Schnitt $SO_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R}) \cap O_2(\mathbb{R})$ wieder eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ ist. Die Gruppe $SO_2(\mathbb{R})$ heißt auch *spezielle, orthogonale Gruppe*. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in SO_2(\mathbb{R})$ von der Form

$$A_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für eine reelle Zahl φ ist. Folgern Sie, dass die Gruppe $SO_2(\mathbb{R})$ isomorph zum Einheitskreis-Gruppe $\{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist.

Lösungshinweise:

(a) Die Inverse einer Matrix $A =: \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Den Rest rechnet man einfach nach.

(b) Klar.

(c) Man verifiziert sofort, dass die Matrizen der gegebenen Form tatsächlich im Schnitt liegen. Für eine Matrix A im Schnitt von $SL_2(\mathbb{R})$ und $O_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(A) = 1$ und $A^{-1} = A^t$, also mit $A =: \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$

$$ad - bc = 1 , \qquad d = a , \qquad -b = c , \qquad (-c = b) , \qquad (a = d) .$$

Sie ist also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + c^2 = 1$. Es gibt also eine Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $a = \cos(\varphi)$ und $c = \sin(\varphi)$. Damit ist $A = A_\varphi$ von der gewünschten Form.

Die Isomorphie haben wir eigentlich schon gezeigt. Wir wissen nämlich, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, $x + iy \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ ein injektiver Homomorphismus von Ringen ist (8. Übung, Aufgabe H1). Insbesondere ist die Abbildung $e^{i\varphi} \mapsto A_\varphi$ ein Gruppen-Isomorphismus.