# Lineare Algebra 1
# 11. Übungsblatt
# Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. A. Kollross**
K. Schwieger

**WS 2011/2012**
**11. Januar 2012**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Äquivalenzrelationen)
Erinnern Sie sich: Eine *Relation* auf einer Menge $M$ ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Eine Relation auf $M$ heißt *Äquivalenzrelation*, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt

(a) reflexiv: $(x, x) \in R$,

(b) symmetrisch: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$,

(c) transitiv: $(x, y), (y, z) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, z) \in R$.

Anstelle von $(x, y) \in R$ schreibt man oft auch $x \sim_R y$ oder, falls die Relation durch den Kontext gegeben ist, auch $x \sim y$. Für ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt die Menge $[x] := \{y \in M \mid y \sim x\}$ die *Äquivalenzklasse* von $x$.

(a) Finden Sie mindestens 3 Äquivalenzrelationen, die in Ihrem Alltag eine Rolle spielen, z.B. auf der Menge aller Studenten, der Menge aller Produkte im Supermarkt, auf der Menge der Lineare-Algebra-Übungsaufgaben etc.

(b) Vielleicht erinnern Sie sich auch noch an Aufgabe G4 der 6.Übung. Dort haben wir eine feste natürliche Zahl $n \geq 2$ die Mengen $[x] := \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $x \in \mathbb{Z}$ betrachtet. Machen Sie sich klar, dass auf den ganzen Zahlen $M := \mathbb{Z}$ wie folgt eine Äquivalenzrelation definiert ist:

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad [x] = [y] .$$

Machen Sie sich auch klar, dass $[x]$ tatsächlich die Äquivalenzklasse von $x$ ist. Die Notation ist also konsistent.

(c) Wir betrachten die Menge $M_2(\mathbb{R})$ aller reellen $(2 \times 2)$-Matrizen und definieren eine Relation auf $M_2(\mathbb{R})$ durch

$$A \sim B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad AB = BA$$

Zeige oder widerlege, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

(d) Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine Relation wie folgt: Es sei $x \sim y$ genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ gibt mit $Ax = y$. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt. Bestimmen Sie für jedes Element $x \in \mathbb{R}^n$ die Äquivalenzklasse $[x] \subseteq \mathbb{R}^n$.

**Lösungshinweise:**

(c) Keine Äquivalenzrelation: Zwar gilt $A \sim E$ für jede Matrix $A$, aber nicht $A \sim B$ für alle Matrizen $A$ und $B$.

(d) Reflexiv: $x = E \cdot x$.
Symmetrisch: Ist $x = Ay$ mit einer invertierbaren Matrix $A$, so ist $y = A^{-1}x$.
Transitiv: Ist $x = Ay$ und $y = Bz$, so folgt $x = ABz$.
Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen, nämlich $\{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für zwei Vektoren $x, y \neq 0$ ergänzt man jeweils zu einer Basis $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y = y_1, y_2, \ldots, y_n$ von $\mathbb{R}^n$. Für die invertierbaren Matrizen $S := (x_1, \ldots, x_n)$ und $T := (y_1, \ldots, y_n$ gilt dann

$$x = ST^{-1}y .$$

**Aufgabe G2** (Dreiecksmatrizen)

(a) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier quadratischer oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Wann ist eine obere Dreiecksmatrix invertierbar? Finden Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

(c) Zeigen Sie, dass die Inverse einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(d) Wann ist eine obere Dreiecksmatrix $A$ *nilpotent*, d.h. wann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$? Finden Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

**Lösungshinweise:**

(a) Seien $D_1$ und $D_2$ obere Dreiecksmatrizen. Seien $(a_{ij})$ die Koeffizienten von $D_1$, $(b_{ij})$ die Koeffizienten von $D_2$ und $(c_{ij})$ die Koeffizienten von $D_1 D_2$. Zu zeigen ist $c_{ij} = 0$ für $i > j$. Sei also $i > j$. Es ist

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Da nach Voraussetzung $a_{ik} = 0$ für $i > k$ und $b_{kj} = 0$ für $k > j$. Wegen $i > j$ verschwinden damit alle Summanden, und somit gilt $c_{ij} = 0$.

(b) Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Diagonalelemente von Null verschieden sind, denn genau dann sind die Spalten linear unabhängig.

(c) Man betrachtet den Gauß-Jordan-Algorithmus zum Invertieren der gegebenen oberen Dreicksmatrix D:

$$D = D_0 = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & R & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = E_n = H_0$$

Der Algorithmus hat für jedes $k$ $(k = n, \ldots, 1)$ die folgenden Schritte: Ist $d_k \neq 0$, dann teile die aktuelle $k$-te Zeile durch $d_k$ und addiere so Vielfache der neuen $k$-ten Zeile zu den darüberliegenden, daß alle Elemente oberhalb von $d_k$ zu Null werden. Führe diese Operationen simultan auch an $E_n$ aus.
Ist $k_0$ der erste (also größte) Index mit $d_{k_0} = 0$, so stehen rechts von $d_{k_0}$ bereits (ebenso wie links von $d_{k_0}$) nur Nullen, man erhält also eine Nullzeile und die Matrix ist nicht invertierbar. Ist kein $d_k = 0$, so ist $D$ invertierbar.

Wir zeigen nun, daß die an $E_n$ simultan ausgeführten Operationen auf eine obere Dreiecksmatrix führen. $H_0$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Die Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl ändert daran nichts. Werden Vielfache der $k$-ten Zeile einer oberen Dreiecksmatrix zur $l$-ten Zeile $(l < k)$ addiert, so bleibt die Matrix ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix, denn für $i < l (< k)$ ist $a_{li}^{neu} = a_{li} + c a_{ki} = 0$, da $a_{li} = a_{ki} = 0$. Also ist $A^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix.

(d) Eine obere Dreiecksmatrix $A =: (a_{i,j})_{i,j}$ ist genau dann nilpotent, wenn alle Diagonaleinträge verschwinden. Ist nämlich ein Diagonaleintrag $a_{i,i} \neq 0$, so ist der entsprechende Diaognaleintrag von $A^n =: (a_{i,j}^{(n)})_{i,j}$ genau durch $a_{i,i}^{(n)} = a_{i,i}^n \neq 0$ gegeben (Induktion). Umgekehrt, verschwindet jeder Diagonaleintrag, so ist $A^k$ für $1 \leq k \leq n$ eine Matrix, in der auch die $(k-1)$-te Nebendiagonale Null ist (Induktion). Insbesondere ist dann $A^n = 0$.

**Aufgabe G3**

Sei $M$ eine beliebige Menge und $V$ ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $f : M \to V$ einen Vektorraum bilden. Definieren Sie als erstes eine geeignete (einfache) Addition und Skalarmultiplikation.

**Lösungshinweise:** Die kanonische Addition und Skalarmultiplikation ist gegeben durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)\,, \qquad\qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)\,.$$

Die Axiome eines Vektorraumes rechnet man einfach nach.

**Aufgabe G4** (Äquivalenz von Matrizen)
Zwei $(n \times n)$-Matrizen $A, B$ heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare Matrizen $S \in M_m$ gibt mit

$$B = SAS^{-1} .$$

(a) Zeigen Sie, dass „Ähnlichkeit“ tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf $M_n(\mathbb{R})$ definiert.

(b) Welche der folgenden Matrizen sind ähnlich?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie ihre Behauptung.

**Lösungshinweise:**

(a) Reflexiv: Klar, $A = EAE^{-1}$.
Symmetrie: Ist $B = SAS^{-1}$, so gilt $A = S^{-1}BS$.
Transitivität: Ist $B = SAS^{-1}$ und $C = TBT^{-1}$, so gilt $C = (TS)A(TS)^{-1}$.

(b) Die Einheitsmatrix ist nur zu sich selbst ähnlich, denn $SES^{-1} = S$.
Weil ähnliche Matrizen den gleichen Rang haben, ist $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu keiner anderen der Matrizen ähnlich.
Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind mit der Transformationsmatrix $S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (Vertauschen der Basisvektoren) zueinander ähnlich. Aus dem gleichen Grund sind auch die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ zueinander ähnlich.
Die Matrizen $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind allerdings nicht untereinander ähnlich. Z.B. ist $A$ nicht nilpotent (sogar eine Projektion, d.h. $A^2 = A$), während $B^2 = 0$ gilt.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Basiswechsel vorwärts)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$B = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } C = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } E_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]_B^C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]_{E_2}^{E_3}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_B$.

**Lösungshinweise:**

(a) Es gilt

$$[\psi]_{E_2}^{E_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^B \cdot [\psi]_B^C \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_C^{E_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^B \cdot [\psi]_B^C \cdot \left( [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C \right)^{-1}.$$

Aus der Gestalt der Basen ergibt sich sofort

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{E_2}^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der letzten Matrix bestimmt man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I+II}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-I,\, III+1}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+II,\, III\cdot\frac{1}{2}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-III,\, II+III}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

D.h. es gilt

$$\left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^C_{E_3}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der ersten Formel ergibt sich also

$$[\psi]^{E_3}_{E_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$[\psi(\vec{v})]_B = [\psi]^C_B[\vec{v}]_C \qquad \text{und} \qquad [\vec{v}]_C = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{E_3}_C[\vec{v}]_{E_3} = \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^C_{E_3}\right)^{-1}[\vec{v}]_{E_3}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{v})]_B &= [\psi]^C_B\left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^C_{E_3}\right)^{-1}[\vec{v}]_{E_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 74 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 60 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe H2** (Basiswechsel rückwärts)
Bezüglich der Basis

$$B := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sei der Endomorphismus $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}.$$

Gib eine geometrische Interpretation dieser Abbildung an. Bestimme nun die Matrix von $\phi$ bezüglich der Standardbasis.
*Hinweis:* $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lösungshinweise:** Dieser Endomorphismus ist die Drehung um 120° um die Achse $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Die Übergangmatrix ist

$$S := [\mathrm{id}]^B_{\mathbb{K}_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

und seine Inverse ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von $\phi$ bzgl. der Standardbasis ist

$$S[\phi]_B S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H3** (Basiswechsel, frei)
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass jede Matrix $A$ äquivalent zu einer Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist. Bestimmen Sie für die folgende Matrix $A$ konkrete Matrizen $S$ und $T$, sodass $SAT$ von obiger Form ist:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Lösungshinweise:** Wir bestimmen zuerst den Kern von $A$. (Rechne, rechne!) Dieser wird von dem Vektor $v_3 := (1,2,-1)^T$ erzeugt. Es folgt, dass $A$ Rang 2 hat und somit äquivalent zu folgender Matrix ist:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$, z.B. durch $v_1 := (1,0,0)^T$ und $v_2 := (0,1,0)^T$. Damit setzen wir

$$T := \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von $A$ ist 2. Die ersten beiden Spalten $w_1 := (1,0,1)^T$ und $w_2 := (0,1,2)^T$ sind linear unabhängig und für die dritte Spalte gilt $(1,2,5)^T = -(w_1 + 2w_2)$. Wir ergänzen zu einer Basis $w_1, w_2, w_3$ von $\mathbb{R}^3$, z.B. durch $w_3 := (1,0,0)^T$ und setzen damit

$$S := \begin{pmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$\begin{aligned} ATe_1 &= Ae_1 = w_1\,, & ATe_2 &= Ae_2 = w_2\,, & ATe_3 &= Av_3 = 0\,, \\ SBe_1 &= Se_1 = w_1\,, & SBe_2 &= Se_2 = w_2\,, & SBe_3 &= S \cdot 0 = 0\,, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $AT = SB$, also $S^{-1}AT = B$.
Bemerkung: In der Konstruktion hat man viele Freiheiten, es gibt noch viele weitere Möglichkeiten die Transformationsmatrizen zu wählen.