Lineare Algebra 1
10. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
22. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ im Allgemeinen wahr sind und begründen Sie Ihre Antworten. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

[ ] Die Lösungsmenge enthält die Null in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn das System homogen ist.

[ ] Ist die Anzahl der Gleichungen m größer als die Zahl der Variablen n, so hat das System keine Lösungen.

[ ] Es gibt nur dann eine Lösung, wenn mindestens ein Koeffizient a_{ij} gleich Null ist.

[ ] Das System hat genau dann eine Lösung, wenn es in Stufenform gebracht werden kann.

[ ] Ist bei einem homogenen System die Anzahl der Gleichungen m kleiner als die Anzahl der Variablen n, so gibt es Lösungen, die nicht gleich Null sind.

[ ] Ist der Rang gleich der Anzahl der Variablen, so ist das System eindeutig lösbar.

Lösungshinweise:

[ ] Richtig: die Null in $\mathbb{R}^n$ ist eine Lösung genau wenn alle Koeffizienten b_i sind Null.

[ ] Falsch: Betrachten Sie das System $\begin{array}{c} x=0 \\ x=0 \end{array}$ mit zwei Zeilen und einer Variable.

[ ] Falsch: Betrachten Sie das System $x = 0$.

[ ] Falsch. Jedes lineare Gleichungssystem kann in Stufenform gebracht werden.

[ ] Richtig. Denn dann gibt es mindestens eine Pivotvariable, die ungleich Null gewählt werden kann.

[ ] Richtig. Es gibt in diesem Fall keine Pivotvariablen

Aufgabe G2 (Berechnen des Inversen)

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus das Inverse der folgenden Matrix mit Einträgen in dem Körper $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [4] & [1] & [2] \\ [3] & [4] & [1] \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise: In $\mathbb{Z}_5$ gilt $[2] \cdot [3] = [1]$ und somit

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
[1] & [2] & [3] & [1] & & \\
[4] & [1] & [2] & & [1] & \\
[3] & [4] & [1] & & & [1] \\
\hline
[1] & [2] & [3] & [1] & [0] & [0] \\
[0] & [3] & [0] & [1] & [1] & [0] \\
[0] & [3] & [2] & [2] & [0] & [1] \\
\hline
[1] & [2] & [3] & [1] & [0] & [0] \\
 & [3] & [0] & [1] & [1] & [0] \\
 & [0] & [2] & [1] & [4] & [1] \\
\hline
[1] & [2] & [3] & [1] & [0] & [0] \\
 & [1] & & [2] & [2] & [0] \\
 & & [1] & [3] & [2] & [3] \\
\hline
[1] & [2] & [0] & [2] & [4] & [1] \\
 & [1] & & [2] & [2] & [0] \\
 & & [1] & [3] & [2] & [3] \\
\hline
[1] & & & [3] & [0] & [1] \\
 & [1] & & [2] & [2] & [0] \\
 & & [1] & [3] & [2] & [3]
\end{array}.
$$

Die Inverse von A ist also

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} [3] & [0] & [1] \\ [2] & [2] & [0] \\ [3] & [2] & [3] \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe G3 (Basis mittels Gauß-Algorithmus)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus eine Basis des linearen Teilraums, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Lösungshinweise: Wir betrachten die Matrix, welche die gegebenen Vektoren als Zeilenvektoren enthält und bringen diese mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Stufenform. Die Zeilen der entstehenden Matrix, welche nicht Null sind, sind dann die gesuchten Basisvektoren.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$ bilden somit eine Basis des betrachteten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe G4
Beschreiben Sie die folgenden Operationen durch Matrixmultiplikation. Genauer: Finden Sie jeweils eine Matrix A, so dass die Multiplikation mit A von links oder von rechts folgendes bewirkt:

(a) Das Vertauschen der i-ten und der j-ten Spalte.

(b) Das Multiplizieren der i-ten Spalte mit einem Skalar λ.

(c) Das Addieren der i-ten und der j-ten Spalte.

(d) Das Addieren des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte.

Warum kann man beim Berechnen des Inversen einer Matrix mittels Gauß-Algorithmus auch **nur** Spalten- statt Zeilenumformungen verwenden? Warum darf man nicht Zeilen- **und** Spalten-Umformungen verwenden?

Lösungshinweise: Die Multiplikation von links bewirkt eine Operation auf den Zeilen, die Multiplikation von rechts auf den Spalten.

(a) Eine 1 in der i-ten Zeile, j-ten Spalte und in der j-ten Zeile, i-ten Spalte und sonst Nullen.

(b) Diagonalmatrix mit λ in der i-ten Zeile und sonst Einsen auf der Diagonalen.

(c) Einsen auf der Diagonalen und eine Eins in der i-ten Zeile, j-te Spalte, sonst Nullen.

(d) Einsen auf der Diagonalen und λ in der i-ten Zeile, j-ten Spalte, sonst Nullen.

Würde man beim Invertieren von A sowohl Zeilen als auch Spaltenumformungen machen, so würde man dadurch Matrizen B_1 und B_2 finden mit $B_1AB_2 = E$, für die man das Produkt B_1B_2 kennt. Die Inverse von A lässt sich daraus aber im Allgemeinen nicht bestimmen.

Aufgabe G5

Ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Lösungen eine Gleichung der Form

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

(a) Welche geometrischen Größen des Kreises werden durch die Konstanten a, b und c beschrieben?

(b) Um die Konstanten a, b und c mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmen zu können, muss man zunächst eine Umformung durchführen. Ausmultiplizieren der Gleichung (1) und Subtrahieren von $a^2 + b^2$ ergibt die Gleichung $x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = c - a^2 - b^2$. Setzt man nun noch $\widetilde{c} = c - a^2 - b^2$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 = \widetilde{c}\,. \tag{2}$$

Welche Bedingungen müssen nun für die Konstanten a, b und $\widetilde{c}$ gelten, damit die Gleichung (2) einen Kreis beschreibt?

(c) Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die Punkte $(-1, 3)$, $(0, 4)$ und $(4, -2)$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Lösungshinweise:

(a) Der Punkt (a, b) ist der Mittelpunkt des Kreises. Das Quadrat des Radius ist c.

(b) Es muss natürlich $a, b, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$ gelten. Eine weitere Bedingung ergibt sich aus $0 < c = \widetilde{c} + a^2 + b^2$, d.h es muss $\widetilde{c} > -a^2 - b^2$ gelten.

(c) Durch Einsetzen der Werte in die Gleichung (2) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1 & + & 2a & + & 9 & - & 6b & = & \widetilde{c} \\ 0 & - & 0 & + & 16 & - & 8b & = & \widetilde{c} \\ 16 & - & 8a & + & 4 & + & 4b & = & \widetilde{c}\,. \end{array}$$

Daraus ergibt sich durch vertauschen der letzten beiden Zeilen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ -8a & + & 4b & - & \widetilde{c} & = & -20 \\ & - & 8b & - & \widetilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Addiert man das 4-fache der ersten Gleichung zur zweiten, so ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ & - & 20b & - & 5\widetilde{c} & = & -60 \\ & - & 8b & - & \widetilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Nun dividiert man die zweite Gleichung durch -5 und erhält

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \widetilde{c} & = & -10 \\ & + & 4b & + & \widetilde{c} & = & 12 \\ & - & 8b & - & \widetilde{c} & = & -16\,. \end{array}$$

Durch Addition des Zweifachen der zweiten Gleichung zur Dritten ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 6b & - & \tilde{c} & = & -10 \\ & + & 4b & + & \tilde{c} & = & 12 \\ & & & + & \tilde{c} & = & 8\,. \end{array}$$

Nun kann man die Lösung berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= 8 \\ b &= \frac{12-\tilde{c}}{4} = \frac{12-8}{4} = 1 \\ a &= \frac{-10+\tilde{c}+6b}{2} = \frac{-10+8+6}{2} = 2\,. \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich $c = \tilde{c} + a^2 + b^2 = 8 + 2^2 + 1^2 = 13$.
Der Mittelpunkt des Kreises ist also der Punkt $(2,1)$ und der Radius ist $\sqrt{13}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist das Gleichungssystem $Ax = b_1$ bzw. $Ax = b_2$ lösbar? Bestimmen Sie ggf. die Lösungsmenge mittels Gauß-Algorithmus.

Lösungshinweise: Wir bestimmen $\operatorname{rank} A$ und $\operatorname{rank}(A|b)$, $j = 1,2$, Mithilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrrr|r|r} 1 & -2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & -5 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -3 & 4 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & 14 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 19 & -14 & 14 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & 14 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Wir sehen direkt, dass $Ax = b_1$ nicht lösbar ist.
Nun bestimmen wir die homogene Lösung des Gleichungssystems: wir können x_5 und x_4 frei wählen, und erhalten $x_3 = \frac{19}{7}x_4 - 2x_5$, $x_2 = \frac{23}{7}x_4 - x_5$ und $x_1 = \frac{25}{7}x_4 + x_5$.
Nun brauchen wir noch eine spezielle Lösung von $Ax = b_2$ und setzen dazu die Nicht–Pivot–Variablen gleich Null, also $x_4 = x_5 = 0$ und erhalten $x_3 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_1 = -2$, also z.B. $x_s = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b_2$ von der Form

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 19 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe H2 (Basiswechsel) (4 Punkte)
Sei $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \quad \varphi(p)(x) := xp(x),$$

und die Vektoren $p_i(x) := x^i$, $q_i(x) := (x+1)^i$ für $i = 0, 1, \dots, 3$. Man macht sich leicht klar, dass dann $B := (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ und

$$C := (p_0, p_1, p_2, p_3)\,, \qquad C' := (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

jeweils Basen von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ sind. Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_C^B$ und $[\varphi]_{C'}^B$.

Lösungshinweise: Um $[\varphi]_C^B$ zu bestimmen, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren aus B unter φ. Es gilt

$$\varphi(p_0) = p_1\,, \qquad \varphi(p_1) = p_2\,, \qquad \varphi(p_2) = p_3\,.$$

Daraus ergibt sich

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $[\varphi]_{C'}^B = [\mathrm{id}]_{C'}^C [\varphi]_C^B$. Außerdem ist die Matrix $[\mathrm{id}]_{C'}^C$ gleich der zu $[\mathrm{id}]_C^{C'}$ Inversen Matrix. Um $[\mathrm{id}]_C^{C'}$ zu berechnen, stellen wir die Elemente von C' bzgl. der Basis C dar.

$$\begin{array}{rclllllll} 1 & = & 1 & & & & & & \\ (x+1) & = & 1 & + & x & & & & \\ (x+1)^2 & = & 1 & + & 2x & + & x^2 & & \\ (x+1)^3 & = & 1 & + & 3x & + & 3x^2 & + & x^3. \end{array}$$

Also gilt

$$[\mathrm{id}]_C^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dieser Matrix bestimmt man wie folgt mittels des Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I+III,\, II-2\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-IV,\, II+3\cdot IV,\, III-3\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$[\mathrm{id}]_{C'}^C = \left([\mathrm{id}]_C^{C'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$[\varphi]_{C'}^B = [\mathrm{id}]_{C'}^C [\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (Hamming-Abstand) (8 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{0,1\}^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In der Informatik wird ein Vektor $x \in \{0,1\}^n$ als Bit-String interpretiert. Eine Teilmenge $C \subseteq \{0,1\}^n$ heißt auch *Code*. Für zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definieren wir ihren Abstand $d(x,y)$ als die Anzahl der verschiedenen Stellen, d.h.

$$d(x,y) := \left|\{i : 1 \le i \le n,\ x_i \neq y_i\}\right| .$$

Dieser Abstand heißt *Hamming-Abstand*. Für eine Teilmenge $C \subseteq \{0,1\}^n$ definieren wir den *inneren Hamming-Abstand* durch

$$H(C) := \min\{d(x,y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine *Metrik* ist, d.h. zeigen Sie für alle $x, y, z \in \{0,1\}^n$:
   i. Definitheit: $d(x,y) = 0$ gdw. $x = y$.
   ii. Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$.
   iii. Dreiecksungleichung: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \{0,1\}^n$ gilt $d(x,y) = d(x-y,0)$. Folgern Sie, dass für einen linearen Teilraum $C \subseteq \{0,1\}^n$ gilt

$$H(C) = \min\{d(x,0) \mid 0 \neq x \in C\} .$$

(c) Sei $C \subseteq \{0,1\}^7$ der lineare Teilraum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 + x_6 \quad &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 \quad + x_5 \quad + x_7 &= 0 . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Teilraums.

(d) Bestimmen Sie den inneren Hamming-Abstand von C.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $H(C) \le 3$ (, dann $H(C) > 1$) und dann $H(C) > 2$.

(e) Sei weiter C der lineare Teilraum aus (c). Nehmen Sie an, Alice möchte an Bob einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_7) \in C$ übertragen, indem nacheinander jede einzelne Koordinate gesendet wird. Bei der Übertragung können Fehler auftreten, sodass Bob einen Vektor $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^7$ empfängt. Erläutern Sie, dass Bob die Nachricht von Alice eindeutig rekonstruieren kann, wenn bei der Übertragung an höchstens einer Stelle ein Fehler aufgetreten ist.

(f) Nehmen Sie konkret an, Bob empfängt $y := (0,1,1,1,0,0,1)$ und nehmen Sie an, dass höchstens an einer Stelle ein Übertragungsfehler passiert ist. Was hat Alice gesendet?

Lösungshinweise:

(a) Wir beschränken uns auf die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \left|\{i : 1 \le i \le 7,\ x_i \neq z_i\}\right| \le \left|\{i : 1 \le i \le 7,\ x_i \neq y_i\} \cup \{i : 1 \le i \le 7,\ y_i \neq z_i\}\right| \\ &\le \left|\{i : 1 \le i \le 7,\ x_i \neq y_i\}\right| + \left|\{i : 1 \le i \le 7,\ y_i \neq z_i\}\right| = d(x,y) + d(y,z) . \end{aligned}$$

(b) Folgt direkt daraus, dass $x_i \neq y_i$ gdw. $x_i - y_i \neq 0$,

(c) Mittels Gauß-Algorithmus erhalten wir für den Teilraum die Basis

$$(1,1,1,1,0,0,0)\,, \qquad (0,1,1,0,1,0,0)\,, \qquad (1,0,1,0,0,1,0)\,, \qquad (1,1,0,0,0,0,1)\,.$$

(d) Es gilt $H(C) \le 3$ weil die letzten drei Basisvektoren Hamming-Abstand 3 zur Null haben. Weiter gilt $H(C) > 1$, denn die kanonischen Basisvektoren liegen alle nicht in C. Außerdem liegen alle Vektoren $e_i + e_j$ mit $1 \le i, j \le 7$, $i \neq j$ nicht in C, weil sie eine der Gleichungen nicht erfüllen. Somit gilt auch $H(C) > 2$.

(e) Ist y höchstens eine Stelle von x verschieden, so gilt $d(x,y) \le 1$. Für jeden Vektor $y \in \{0,1\}^7$ gibt höchstens einen Vektor $x \in C$, der sich von y in höchstens einer Stelle unterscheidet, d.h. mit Hamming-Abstand $d(x,y) \le 1$. Gäbe es nämlich zwei verschiedene solche Vektoren $x_1, x_2 \in C$, so würde gelten

$$d(x_1,x_2) \le d(x_1,y) + d(y,x_2) = d(x_1,y) + d(x_2,y) \le 1 + 1 = 2 .$$

Dies widerspricht aber $H(C) = 3$.

Zur Rekonstruktion: Liegt y nicht bereits selbst in C, so lässt sich die tatsächlich Nachricht rekonstruieren, indem man y an jeder einzelnen Stelle verändert und prüft, ob der resultierende Vektor x in C liegt.

(f) Für $y = (0,1,1,1,0,0,1)$ ist $x := (0,0,1,1,0,0,1)$ die tatsächliche Nachricht.

Aufgabe H4 (Wann sind affine Teilräume gleich?) (4 Punkte)
Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie: Für Vektoren $x, y \in V$ und lineare Teilräume $U, W \subseteq V$ sind äquivalent:

(a) $x + U = y + W$.

(b) $U = W$ und $(x - y) \in U$.

Lösungshinweise: Angenommen, es gilt $\vec{a} + U = \vec{b} + W$. Aus $\vec{b} = \vec{b} + \vec{0} \in \vec{b} + W = \vec{a} + U$ folgt $\vec{b} + U = \vec{a} + U = \vec{b} + W$. Sei nun $\vec{u} \in U$ dann gilt $\vec{b} + \vec{u} \in \vec{b} + U = \vec{b} + W$, woraus sich sofort $\vec{u} \in W$ ergibt. D.h. es gilt $U \subseteq W$. Analog ergibt sich $W \subseteq U$. Insgesamt ist also $W = U$ und auch $\vec{b} - \vec{a} \in U$.
Zur Umkehrung: Angenommen, es gilt $U = W$ und $\vec{b} - \vec{a} \in U$. Dann folgt sofort $\vec{a} + U = \vec{b} + U = \vec{b} + W$.

Nicht vergessen:
Anmeldung zum Mentorensystem bis zum 05.01.2012.
Studienanfänger Bachelor Mathematik über die Seite
`https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/evs/e/23/982.html`
Studienanfänger Lehramt Gymnasium Mathematik über die Seite
`https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/evs/e/23/983.html`