Lineare Algebra 1
9. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
15. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachten Sie für die folgenden $(m \times n)$-Matrizen jeweils die durch $x \mapsto A_i x$ gegebene Abbildung $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Welche der Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? (Wie kann man dies an den Matrizen ablesen?) Geben Sie jeweils die Dimension des Bildes und des Kerns von φ an.

Lösungshinweise: 1) Die Abbildung ist surjektiv, wenn die Zeilen linear unabhängig sind, injektiv hingegen, wenn die Spalten linear unabhängig sind.
Damit sieht man sofort, daß φ_1 surjektiv, aber nicht injektiv, φ_2 injektiv, aber nicht surjektiv und φ_3 surjektiv, aber nicht injektiv ist.
Die Zeilen von A_4 sind linear abhängig, die Spalten sind schon aus Kardinalitätsgründen linear abhängig, daher ist φ_4 weder injektiv noch surjektiv. Im Fall von A_5 zeigt man leicht, daß die Spalten linear unabhängig sind, denn sonst müßte (da es zwei Vektoren sind) gelten:
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Aus der ersten Zeile folgt $\lambda = 2$, was in der zweiten Zeile auf einen Widerspruch führt. Da Zeilenrang gleich Spaltenrang ist, folgt daraus, daß φ_5 sowohl injektiv als auch surjektiv und somit bijektiv ist.
Bei A_6 bemerkt man durch scharfes Hinsehen, daß zweimal die zweite Zeile zur ersten addiert gerade die dritte ergibt. (Wenn man nicht scharf hinsieht, ergibt auch der Gauß-Algorithmus, daß die Zeilen linear abhängig sind.) Daher ist φ_6 nicht surjektiv und als eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nach 5.1.5 auch nicht injektiv.
2) Der Rang der Abbildung φ_i ist gleich dem Zeilenrang (und damit auch gleich dem Spaltenrang) der Matrix A_i. Es ist nach 5.1.4 $\operatorname{rank}\varphi + \dim(\ker\varphi) = n$. Offenbar ist $\operatorname{rank}\varphi_1 = \operatorname{rank}\varphi_2 = 1$. Daher ist $\dim(\ker\varphi_1) = 3 - 1 = 2$ und $\dim(\ker\varphi_2) = 1 - 1 = 0$ (was auch klar ist, da φ_2 injektiv ist). Da die Zeilen (oder auch die ersten beiden Spalten) von A_3 linear unabhängig sind, ist $\operatorname{rank}\varphi_1 = 2$ und daher $\dim(\ker\varphi_3) = 3 - 2 = 1$. Der Zeilenrang von A_4 ist eins, daher ist $\operatorname{rank}\varphi_4 = 1$ und damit $\dim(\ker\varphi_4) = 3 - 1 = 2$. Der Spaltenrang von A_5 und damit auch $\operatorname{rank}\varphi_5$ ist zwei und $\dim(\ker\varphi_3) = 2 - 2 = 0$.
Die ersten beiden Zeilen von A_6 sind offenbar linear unabhängig. Da nach a) $\operatorname{rank}\varphi_6 \leq 2$, folgt $\operatorname{rank}\varphi_6 = 2$ und daher $\dim(\ker\varphi_3) = 3 - 2 = 1$.

Aufgabe G2 (Basistransformation)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zum einen mit der kanonischen Basis B_0, zum anderen mit der Basis $B = \big((1,-1,-1)^T, (1,0,1)^T, (1,1,1)^T\big)$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$[\varphi]_{B_0}^{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{und} \qquad [\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $[\mathrm{id}]^B_{B_0}$ und verifizieren Sie

$$[\mathrm{id}]^{B_0}_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

(c) Bestimmen Sie die Matrix der inversen Abbildung $[\varphi^{-1}]^B_B$ und damit $[\varphi^{-1}]^{B_0}_{B_0}$.

Lösungshinweise:

(a) Bezeichne mit b_1, b_2, b_3 die Vektoren der Basis B. Wegen der Gestalt von $[\varphi]^B_B$ gilt $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = 2b_2$ und $\varphi(b_3) = 3b_3$. Man rechnet leicht nach, dass auch für die Matrix $A := [\varphi]^{B_0}_{B_0}$ gilt

$$A \cdot [b_1]_{B_0} = [b_1]_{B_0} , \qquad A \cdot [b_2]_{B_0} = 2[b_2]_{B_0} , \qquad A \cdot [b_3]_{B_0} = 3[b_3]_{B_0} .$$

Die Matrix A beschreibt also auch die Abbildung φ bzgl. der kanonischen Basis B_0.

(b) Die Matrix $[\mathrm{id}]^B_{B_0}$ hat als Spalten die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bzgl. der Basis B_0, also

$$[\mathrm{id}]^B_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix $[\mathrm{id}]^{B_0}_B$ ist die Inverse von $[\mathrm{id}]^B_{B_0}$. Für die angegebene Matrix rechnet man das leicht nach.

(c) Die Matrix $[\varphi^{-1}]^B_B$, also die Inverse von $[\varphi]^B_B$, ist leicht bestimmt (oder geraten). Die Inverse $[\varphi^{-1}]^B_B$ ist leicht berechnet über

$$[\varphi^{-1}]^{B_0}_{B_0} = [\mathrm{id}]^B_{B_0} \cdot [\varphi^{-1}]^B_B \cdot [\mathrm{id}]^{B_0}_B .$$

(Als Kontrolle bietet sich an, $\varphi^{-1}(b_1) = b_1$, $\varphi^{-1}(b_2) = \frac{1}{2}b_2$ und $\varphi^{-1}(b_3) = \frac{1}{3}b_3$ für die berechnete Matrix zu überprüfen.)

Aufgabe G3

Für eine $(n \times m)$-Matrix Matrix $A =: (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ ist die *transponierte Matrix* die $(m \times n)$-Matrix mit $A^T := (a_{j,i})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$, d.h.

$$A =: \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} .$$

Machen Sie sich klar, dass die Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n\times n)$-Matrizen einen reellen Vektorraum bilden. Wir betrachten hier den Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der (2×2)-Matrizen und die folgende lineare Abbildung:

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) := \tfrac{1}{2}(A - A^T)$$

(a) Zeigen Sie $\varphi^2 = \varphi$.
Bemerkung: Lineare Abbildungen φ mit $\varphi^2 = \varphi$ heißen auch *Projektionen*. Die obige Abbildung ist also eine Projektion.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes von φ.

(c) Zeigen Sie $M_2(\mathbb{R}) = (\ker\varphi) \oplus (\mathrm{im}\,\varphi)$. Wie sieht die Matrix von φ bezüglich der von Ihnen gewählten Basis von $M_2(\mathbb{R})$ aus?

Lösungshinweise:

(a) Nachrechnen.

(b) Die Vektoren $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $A_3 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ liegen im Kern von φ. Der Vektor $A_4 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ liegt mit $\varphi(A_4) = A_4$ im Bild von φ.

(c) Die Gleichung $V = \ker\varphi \oplus \mathrm{im}\,\varphi$ gilt allgemein für Projektionen (vgl. Tutorium). Hier speziell sieht man aber sofort, dass das eindimensionale Bild $\mathrm{im}\,\varphi = \mathbb{R} \cdot A_4$ den Kern trivial schneidet. Somit bildet $(A_1, \ldots, A_4)$ eine Basis von φ und die Matrix von φ hat die Form

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe G4 (Affine Teilräume, Fingerübung)
Sei V ein reeller Vektorraum. Für einen Vektor $v \in V$ und eine Teilmenge $S \subseteq V$ setzen wir $v + S := \{v + s \mid s \in S\}$. Zeigen Sie: Für eine nicht-leere Teilmenge $A \subseteq V$ sind äquivalent:

(a) Es gibt einen Untervektorraum $U \subseteq V$ und einen Vektor $v \in V$ mit $A = v + U$

(b) Für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Wie lässt sich die Bedingung (b) geometrisch interpretieren? Eine Teilmenge A, für welche diese Bedingungen erfüllt sind, heißt auch *affiner Teilraum* von V.

Lösungshinweise: Die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ rechnet man einfach nach. Für die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ wählen wir $x \in A$ beliebig, setzen $U := (-x) + A$ und verifizieren $A = x + U$ direkt.

Aufgabe G5
In der Vorlesung haben Sie gezeigt, dass eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

(a) Finden Sie einen Vektorraum und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Finde Sie eine Vektorraum und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösungshinweise: Die Ableitung auf dem Raum aller reellen Polynome $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ist z.B. surjektiv, aber nicht injektiv. Die Multiplikation mit x auf diesem Raum $x^n \mapsto x^{n+1}$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie den Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$ fix. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) := B \cdot A\,.$$

(b) Betrachten Sie nun speziell $n = 2$ und $B =: \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ an und bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich dieser Basis.

Lösungshinweise:

(a) Weil $M_2(\mathbb{R})$ eine Algebra (Ring + Vektorraum + bilineare Multiplikation) bilden, rechnet man einfach nach

$$\varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 B A_1 + \lambda_2 B A_2 = \lambda_1 \varphi(A_1) + \lambda_2 \varphi(A_2)\,.$$

(b) Eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ sind z.B. die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne, rechne:

$$BA_1 = aA_1 + cA_3\,, \qquad BA_2 = aA_2 + cA_4\,, \qquad BA_3 = bA_1 + dA_3\,, \qquad BA_4 = bA_2 + dA_3\,.$$

Also ist die Matrix von φ bzgl. der Basis $A_1, \ldots, A_4$ gegeben durch

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (Polynominterpolation) (4 Punkte)
Bei der Polynominterpolation geht es darum ein Polynom zu finden, welches an gegebenen paarweise verschiedenen (Stütz-)Stellen $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ bestimmte vorgegebene Wert $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ annimmt. Das heißt wir suchen ein Polynom p mit

$$y_0 = p(t_0)\,, \qquad y_1 = p(t_1)\,, \qquad \dots \qquad y_n = p(t_n)\,.$$

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass es genau ein solches Polynom vom Grad n gibt. Hierzu bezeichnen wir mit $L \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome, welche diese Gleichung erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass L entweder leer oder ein affiner Unterraum von $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_0, \dots, p_n$ eine Basis von $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ bilden, wobei:

$$p_i(t) := \prod_{i \neq j} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \frac{t - t_0}{t_i - t_0} \cdot \dots \cdot \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} \cdot \dots \cdot \frac{t - t_n}{t_i - t_n}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Polynome an den Stützstellen $t_0, \dots, t_n$.
Bemerkung: Die Polynome $p_0, \dots, p_n$ heißen *Lagrange-Polynome* zu den Stützstellen $t_0, \dots, t_n$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

$$\Phi : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Phi(p) := \big(p(t_0), p(t_1), \dots, p(t_n)\big)^T\,.$$

linear ist mit $\ker \Phi = \{0\}$, und folgern Sie, dass es genau ein Polynom $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ gibt mit $p(t_0) = y_0, \dots, p(t_n) = y_n$.

(d) Geben Sie dieses Polynom in den Koordinaten bzgl. der obigen Basis $p_0, \dots, p_n$ an.

Lösungshinweise:

(a) Sind $p, q \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt auch für jedes k auch

$$\lambda p(t_k) + (1 - \lambda) q(t_k) = \lambda y_k + (1 - \lambda) y_k = y_k\,,$$

d.h. auch $\lambda p + (1 - \lambda) q$ liegt in L.

(b) Bezeichne mit $e_1, \dots, e_{n+1}$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^{n+1}$. Nachrechnen liefert, dass für alle $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$v_k := \big(p_k(t_0), \dots, p_k(t_n)\big)^T = e_{k+1}\,.$$

Insbesondere sind die Vektoren v_k linear unabhängig. Es folgt, dass auch die Polynome $p_0, \dots, p_n$ linear unabängig sind (vgl. Aufgabe G26, Übung 7).

(c) Dass diese Abbildung linear ist, haben wir bereits in Aufgabe G26, Übung 7 gezeigt. Sei $p \in \ker \Phi$, d.h. $p(t_0) = \dots = p(t_n) = 0$. Dann ist p ein Polynom von Grad höchstens n mit $n+1$ paarweise verschiedenen Nullstellen. Somit muss p die Nullfunktion sein.

Die Abbildung Φ hat also trivialen Kern, ist also injektiv. Es gibt somit höchstens ein Polynom p mit $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)^T$, d.h. $p(t_0) = y_0, \dots, p(t_n) = y_n$. Die Existenz zeigen wir im nächsten Aufgabenteil.

(d) Das folgende Polynom erfüllt die gewünschte Bedingung (nachrechnen):

$$p := y_0 p_0 + y_1 p_1 + \dots + y_n p_n$$

Aufgabe H3 (Minimalpolynom und Inverses) (4 Punkte)
Machen Sie sich klar, dass die Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen einen reellen Vektorraum bildet. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit:
   i. Die Matrizen $E, A, \dots, A^{m-1}$ sind linear unabhängig.
   ii. Die Matrizen $E, A, \dots, A^{m-1}, A^m$ sind linear abhängig.

(b) Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$, die nicht alle verschwinden und für die gilt

$$A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 E = 0\,.$$

Bemerkung: Das Polynom $P(X) := a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m$ heißt auch das *Minimalpolynom* von A.

(c) A ist genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist A^{-1} ein Polynom in A.

Lösungshinweise: 1) Der Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ ist endlich dimensional. Also existiert $l \in \mathbb{N}$, so dass $(E, A, A^2, \ldots, A^l)$ linear abhängig ist. Dann ist

$$m = \min\{l \in \mathbb{N} : (E, A, A^2, \ldots, A^l) \text{ ist linear abhängig}\}.$$

2) Ist $a_0 = 0$ und A invertierbar, dann aus $A(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2 A + a_1 E) = 0$ folgt

$$A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2 A + a_1 E = 0;$$

was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $E, \ldots, A^{m-1}$ steht. Ist $a_0 \neq 0$, dann

$$E = -\frac{1}{a_0}(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} \cdots + a_2 A + a_1 E)A = A(-\frac{1}{a_0}(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} \cdots + a_2 A + a_1 E))$$

gilt. Also ist A invertierbar und gilt

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} \cdots + a_2 A + a_1 E).$$