Lineare Algebra 1
8. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
8. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Aufwärmen)

(a) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind linear? Begründen Sie ihre Entscheidung.

[ ] $(x,y) \mapsto x + 2y$, [ ] $(x,y) \mapsto xy$, [ ] $(x,y) \mapsto |x|$.

(b) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Sind die Bilder $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Aufgabe G2 (Koordinaten)

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ und der Basis $B' = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 := (1,0,1)^T, \qquad b_2 := (1,1,0)^T, \qquad b_3 := (0,1,1)^T.$$

(a) Der Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Basis B' die Koordinaten $(3,2,1)^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich der Basis B.

(b) Der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasis B die Koordinaten $(2,2,2)^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B'.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich der Basis B'.

Lösungshinweise:

(a) $w = 3b_1 + 2b_2 + b_3 = (5,3,4)^T$.

(b) $(2,2,2)^T = b_1 + b_2 + b_3$.

(c) Offensichtlich $[b_1] = (1,0,0)^T$, $[b_2] = (0,1,0)^T$, $[b_3] = (0,0,1)^T$.

Aufgabe G3 (Spiegelung an einer Ebene)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Mit $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir die Spiegelung an der Ursprungsebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene und eine Basis des linearen Teilraums E.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich einer geeignet gewählten Basis B von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Standardbasis bzgl. der Basis B.

(d) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösungshinweise:

(a) Ein Normalenvektor von E ist $n := (0,1,1)^T$. Eine Basis von E ist durch $b_1 := (1,0,0)^T$ und $b_2 := (0,1,-1)^T$ gegeben.

(b) Zusammen ergeben die Vektoren b_1, b_2, n eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich dieser Basis B hat σ die Matrix

$$[\sigma]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) $(1,0,0)^T = b_1$, $(0,1,0)^T = \frac{1}{2}(n+b_2)$, $(0,0,1)^T = \frac{1}{2}(n-b_2)^T$.

(d) Die Transformationsmatrix $S := \mathscr{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{K}_3}(\mathrm{id})$ hat die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Inverse haben wir im vorherigen Aufgabenteil bestimmt:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Bezüglich der Standardbasis C hat σ also die Matrix

$$\begin{aligned} [\sigma]^C_C = &= S \cdot [\sigma]^B_B \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe G4 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)
Zeigen Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen: Für eine lineare Abbiludng $\varphi : V \to W$ auf einem endlich-dimensionalem Vektorraum V gilt

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im} \varphi) .$$

Lösungshinweise: Wähle eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $\ker \varphi$ und ergänze diese zu einer Basis $b_1, \dots, b_n, \dots, b_m$ von V. Wir zeigen, dass dann $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_m)$ eine Basis von $\operatorname{im} \varphi$ ist: Weil $b_1, \dots, b_m$ den Vektorraum V erzeugen, erzeugen die Vektoren $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_m)$ das Bild $\operatorname{im} \varphi$. Wegen $\varphi(b_1) = \cdots = \varphi(b_n)$ sind also $\varphi(b_{n+1}), \dots, \varphi(b_m)$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im} \varphi$.
Es bleibt zu zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Seien hierzu $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m$ Skalare mit

$$0 = \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k \varphi(b_k) = \varphi\Big(\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k b_k \Big) .$$

Der Vektor $v := \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k b_k$ liegt also im Kern von φ, hat also eine Darstellung der Form $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$ mit Skalaren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Weil $b_1, \dots, b_m$ linear unabhängig sind – v also höchstens eine Darstellung als Linearkombination von $b_1, \dots, b_m$ hat – folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Aufgabe G5 (Lineare Abbildung auf direkten Summen)

(a) (Erinnerung?) Sei $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei lineare Teilräume mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von U_1 und $c_1, \dots, c_m$ eine Basis von U_2. Dann ist $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ eine Basis von $U_1 \oplus U_2$.

(b) Seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei Vektorräume und $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$.

(c) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V, sodass es für je zwei lineare Abbildungen $\phi_1 : U_1 \to W$ und $\phi_2 : U_2 \to W$ genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$ gibt. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

Lösungshinweise:

(a) Das wurde (indirekt) schon in Aufgabe G2, 7. Übung gezeigt.

(b) Existenz: Für alle $\vec{x}$ in V, sei $\phi(\vec{x}) := \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2)$, mit $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ und $\vec{x}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_1 \in U_2$. ϕ ist linear, wie jetzt gezeigt wird. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ und $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$, mit $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in U_2$. Es gilt $\vec{x}_1 + \lambda \vec{y}_1 \in U_1$ und $\vec{x}_2 + \lambda \vec{y}_2 \in U_2$, weil U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind. $\phi(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = \phi_1(\vec{x}_1 + \lambda \vec{y}_1) + \phi_2(\vec{x}_2 + \lambda \vec{y}_2) = \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2) + \lambda \phi_1(\vec{y}_1) + \lambda \phi_2(\vec{y}_2) = \phi(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{y})$.
Eindeutigkeit: Seien $\phi, \phi' : V \to W$ zwei lineare Abbildungen, sodass $\phi|_{U_1} = \phi'|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi'|_{U_2} = \phi_2$ gilt. Für alle $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U_1 \oplus U_2$, $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_1) + \phi(\vec{x}_2) = \phi_1(\vec{x}_1) + \phi_2(\vec{x}_2) = \phi'_1(\vec{x}_1) + \phi'_2(\vec{x}_2) = \phi'(\vec{x})$.

(c) Wir zeigen zuerst, dass $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gilt und dann, dass $U_1 + U_2 = V$ gilt.
($\Leftarrow$) Seien $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = \mathrm{id}$ und ϕ linear, sodass $\phi|_{U_1} = \phi_1$ und $\phi|_{U_2} = \phi_2$ gilt. Sei $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$. $\phi(\vec{v}) = \phi_1(\vec{v}) = \vec{0}$ und $\phi(\vec{v}) = \phi_2(\vec{v}) = \vec{v}$. Daraus folgt $\vec{v} = \vec{0}$, d.h. $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.
($\Rightarrow$) Sei W ein Untervektorraum mit $V = (U_1 + U_2) \oplus W$. (Ein solcher Untervektorraum existiert.) Sei $\phi = 0$ und ϕ' linear, sodass $\phi'|_{U_1+U_2} = 0$ und $\phi'|_W = \mathrm{id}$. (Solche Abbildung existiert wegen der vorige Teilaufgabe.) Wegen der Annahme gilt $\phi = \phi'$, d.h. $W = \{\vec{0}\}$ und $U_1 + U_2 = V$.

Hausübung

Aufgabe H1 (ℂ als (2×2)-Matrizen) (4 Punkte)
Betrachten Sie die Menge der komplexen Zahlen $V := \mathbb{C}$ als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Machen Sie sich klar, dass $v_1 := 1$ und $v_2 := i$ eine Basis von $\mathbb{C}$ bilden. Für eine komplexe Zahl z betrachten wir die folgende Abbildung

$$\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_z(w) := z \cdot w\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ_z eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix A_z von φ_z bezüglich der Basis $1, i$.

(c) Beschreiben Sie die Abbildung φ_z für eine reelle Zahle $z \in \mathbb{R}$ und für eine Zahl auf dem Einheitskreis, $|z| = 1$, geometrisch in eigenen Worten.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge aller darstellenden Matrizen $\{A_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper bilden.

Lösungshinweise:

(a) Einfach nachrechnen. (Die Abbildung ist sogar ℂ-linear.)

(b) Für $z = a + ib$ ergibt sich die Matrix

$$A_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(c) Für eine reelle Zahl $z \in \mathbb{R}$ ist beschreibt A_z eine Streckung um den Faktor z (für $z < 0$ mit entspr. Punktspiegelung am Ursprung). Für eine Zahl auf dem Einheitskreis $z = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ beschreibt A_z eine Drehung um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn.

(d) Man rechnet sich nach, dass $z \mapsto A_z$ ein injektiver Homomorphismus von Ringen mit Eins ist. Somit ist das Bild des Körpers ℂ wieder ein Körper.

Aufgabe H2 (Lineare Unabhängigkeit in Funktionenräumen) (4 Punkte)
Sei M eine nichtleere Menge. Betrachte den Vektorraum $\mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Zeigen Sie:

(a) Seien $x_1, \ldots, x_n \in M$. Dann ist die folgende Abbildung linear:

$$\mathrm{eval}_{x_1,\ldots,x_n} : \mathscr{F}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n, \quad f \mapsto \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)\,.$$

(b) Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}(M, \mathbb{K})$. Gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in M$, so dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v_i := \big(f_i(x_1),\, f_i(x_2), \ldots, f_i(x_n)\big) \qquad (1 \le i \le n) \tag{1}$$

linear unabhängig sind, so sind auch die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig.

(c*) Gilt auch die Umkehrung: Sind $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}(M, \mathbb{R})$ linear unabhängig, so gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in M$, so dass die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ aus (1) linear unabhängig sind?

Lösungshinweise:

(a) Seien $f, g \in \mathscr{F}(M, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\mathrm{eval}_x(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = \mathrm{eval}_x(f) + \lambda\, \mathrm{eval}_x(g)\,.$$

(b) Betrachte die Abbildung

$$\Phi : \mathscr{F}(M,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n, \quad \Phi(f) := \big(f(x_1),\dots,f(x_n)\big)\ .$$

Diese Abbildung ist linear und es gilt $\Phi(f_k) = v_k$ für jedes k. Nach Voraussetzung sind die Bilder $\Phi(f_1) = v_1,\dots,\Phi(f_n) = v_n$ linear unabhängig. Nach Aufgabe G1 sind somit auch die Funktionen $f_1,\dots,f_n$ linear unabhängig.

Aufgabe H3 (Schwingungen gleicher Frequenz) (4 Punkte)
Betrachte den reellen Vektorraum $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne f_α die Funktion mit $f_\alpha(t) := \sin(t+\alpha)$. Wir bezeichnen mit U den von diesen Funktionen aufgespannten Untervektorraum:

$$U := \operatorname{span}\{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}\ .$$

(a) Skizzieren Sie einige der Funktionen f_α für verschiedene Werte von α. Zeigen Sie, dass die Funktionen f,g mit $f(t) := \sin(t)$ und $g(t) := \cos(t)$ in U liegen.

(b) Zeigen Sie, dass U ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.

(c) Berechnen Sie die Koordinaten der Funktion $f_{\pi/4}$ bezüglich der Basis aus (b).

(d) Sei $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ fix. Machen Sie sich klar, dass für jede Funktion $f \in U$ auch die Funktion $(Sf)(t) := f(t+\alpha_0)$, $t \in \mathbb{R}$, wieder in U liegt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$S : U \to U, \quad f \mapsto Sf$$

linear ist. Beschreiben Sie die Abbildung S anhand Ihrer Skizze mit eigenen Worten. Bestimmen Sie die Matrix von S bezüglich der Basis aus (b).

Hinweis: Verwenden Sie Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

Lösungshinweise:

(a) $f_0(t) = \sin(t)$ und $f_{\pi/2} = \sin(t+\pi/2) = \cos(t)$.

(b) Wir haben bereits gezeigt, dass die Funktionen $f(t) = \sin(t)$ und $g(t) = \cos(t)$ linear unabhängig sind. Wir müssen also nur zeigen, dass diese beiden Funktionen auch U erzeugen. Hierfür genügt es zu zeigen, dass jede Funktion f_α mit $\alpha \in \mathbb{R}$ in dem von f und g erzeugten linearen Teilraum liegt. Sei also $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f_\alpha(t) = \sin(t+\alpha) = \sin(t)\cos(\alpha) + \cos(t)\sin(\alpha) = \cos(\alpha)f(t) + \sin(\alpha)g(t)\ ,$$

d.h. die Funktion f_α ist eine Linearkombination von f und g.

(c) Bezeichnen mit $B = (f,g)$ die Basis $f(t) = \sin(t)$ und $g(t) = \cos(t)$. Mit obiger Rechnung ergibt sich speziell für $\alpha = \pi/4$

$$f_{\pi/4} = \cos(\pi/4)f + \sin(\pi/4)g = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}f + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}g\ ,$$

d.h. $[f_{\pi/4}]_B = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})^T$.

(d) Die Abbildung S verschiebt die Funktion um α_0 in negativer Richtung. Es gilt

$$\sin(t+\alpha_0) = \cos(\alpha_0)\sin(t) + \sin(\alpha_0)\cos(t)\ , \qquad \cos(t+\alpha_0) = \cos(\alpha_0)\cos(t) - \sin(\alpha_0)\sin(t)\ .$$

Somit ergibt sich die Matrix

$$[S] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0) & -\sin(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) \end{pmatrix}\ .$$

(Die Abbildung S entspricht also in dieser Basis einer Drehung um den Winkel α_0.)