Lineare Algebra 1
7. Übungsblatt
Lösungshinweise

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
1. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$v_1 := (0,1,1)\,, \qquad v_2 := (1,0,1)\,, \qquad v_3 := (1,1,0)\,, \qquad v_4 := (1,1,1)\,.$$

(a) Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig?

(b) Sind v_1, v_2, v_3 und v_4 linear unabhängig?

(c) Bilden v_1, v_2, v_3 und v_4 ein Erzeugendensystem?

(d) Welche Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Lösungshinweise:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ ist also linear unabhängig.

(b) Es gilt offensichtlich $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} - 2\vec{v_4} = 0$.
$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ ist also nicht linear unabhängig.

(c) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Durch den Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} + \lambda_4 \vec{v_4}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & z \end{array} \implies \begin{array}{ccccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x+y-z \\ \Longrightarrow \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

Eine Lösung des letzten Gleichungssystems ist

$$\lambda_4 = 0, \qquad \lambda_3 = \frac{x+y-z}{2},$$
$$\lambda_2 = -y+z+\frac{x+y-z}{2} = \frac{x-y+z}{2}, \qquad \lambda_1 = y - \frac{x+y-z}{2} = \frac{-x+y+z}{2}.$$

D.h. jedes Element aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ schreiben. Diese bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(d) Je drei Vektoren aus $M := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Alle anderen Teilmengen sind keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

Man sieht leicht, dass der Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ ist. Diese beiden Vektoren bilden also kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Analog ist der Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_4}$.Diese beiden Vektoren bilden also auch kein Erzeugendensystem und damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Durch vertauschen der Koordinaten erhält man, dass keine zweielementige Teilmenge von M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Natürlich wird $\mathbb{R}^3$ dann auch nicht von Mengen mit weniger Elementen erzeugt. D.h. jede Teilmenge von M, die Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, muss mindestens drei Elemente haben. Da M selbst wegen Aufgabenteil (b) nicht linear unabhängig ist, muss eine solche Basis aus genau drei Elementen bestehen.

Wir zeigen nun, dass die Mengen $M_1 := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ und $M_2 := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_4}\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Durch Vertauschen der Koordinaten ergibt sich dann, dass alle dreielementrige Teilmengen von M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Wegen Aufgabenteil (a) ist M_1 linear unabhängig.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_4} = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.

M_2 ist also linear unabhängig.

Sei $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus dem Gleichungssystem in Aufgabenteil (c) erhält man

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \frac{-x+y+z}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{x+y-z}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{-x+y+z}{2}\vec{v_1} + \frac{x-y+z}{2}\vec{v_2} + \frac{x+y-z}{2}\vec{v_3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-x+z)\,\vec{v_1} + (-y+z)\,\vec{v_2} + (x+y-z)\,\vec{v_4}\,.$$

D.h. sowohl M_1 als auch M_2 sind Erzeugendensysteme des $\mathbb{R}^3$. Damit bilden beide Mengen eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G2 (Basis und direkte Summe)
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

(a) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ lineare Teilräume mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Zeigen Sie ohne Verwendung der Dimensionsformel:

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)\,.$$

(b) Sei $U_1 \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie: Es gibt einen Teilraum $U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$ gibt.

Lösungshinweise:

(a) Wähle eine Basis $v_1, \ldots, v_m$ von U_1 und eine Basis $w_1, \ldots, w_n$ von U_2. Dann ist $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ ein Erzeugendensystem für $U_1 + U_2$. Wir behaupten, dass diese Vektoren auch linear unabhängig sind: Seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$ Skalare mit

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$$

Wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ muss dann schon $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ und $\sum_j \mu_j w_j = 0$ gelten. Weil $v_1, \ldots, v_m$ bzw. $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ und $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$.
Die Vektoren $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ bilden also eine Basis von $U_1 + U_2$, und somit $\dim(U_1 \oplus U_2) = m + n = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

(b) Es sei $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$ eine Basis von U_1. Dann sind diese Vektoren insbesondere auch in V linear unabhängig und wegen dem Basisergänzungssatz gibt es Elemente $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m \in V$, so dass $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ eine Basis von V bildet. Setze $U_2 := \operatorname{span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$. Dies ist bekanntermaßen ein Untervektorraum von V.
Jedes Element aus V lässt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n}_{\in U_1} + \underbrace{\mu_1 \vec{w}_1 + \cdots + \mu_m \vec{w}_m}_{\in U_2}$$

mit $\lambda_1 \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}$ schreiben. Da $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U_2. D.h. jedes Element aus U_1 hat genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ und jedes Element aus U_2 hat genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$. Zusammen ergibt sich, dass jedes Element aus V eine eindeutige Darstellung als Summe von einem Element aus U_1 und einem Element aus U_2 hat. D.h. es gilt $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe G3
Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$ und die folgenden linearen Teilräume des Vektorraums $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$:

$$\begin{aligned} U &:= \operatorname{span}\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}\ , \\ V &:= \operatorname{span}\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0)\}\ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U, V, $U+V$ und $U\cap V$.

Lösungshinweise: Übrigens, die linearen Teilräume kann man wegen des kleinen Körpers direkt hinschrieben. „Es kommen alle Summen hinzu“:

$$\begin{aligned} U &= \{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1),\ (1,0,1,1),\ (0,0,0,0)\} \\ V &= \left\{ \begin{matrix} (1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0), \\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1),\ (1,1,1,1),\ (0,0,0,0) \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die Vektoren $(1,0,0,0)$ und $(0,0,1,1)$ linear unabhängig sind. Der Teilraum U hat also Dimension 2. Für V sieht man sofort, dass

$$(1,1,0,0)+(1,0,1,0)=(0,1,1,0)$$

gilt, d.h. die Vektoren sind linear abhängig. Somit hat V höchstens Dimension 3. Man rechnet auch leicht nach, dass die (übrigen) Vektoren $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ und $(1,0,0,1)$ tatsächlich linear unabhängig sind, also $\dim V = 3$.
Der Teilraum $U+V$ ist Obermenge von V und hat damit mindestens Dimension 3 und als Teilmenge von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ höchstens Dimension 4. Man rechnet leicht nach (oder sieht sofort), dass der Vektor $(1,0,0,0)\in U$ nicht in V, aber in der Summe $U+V$ liegt. Also hat $U+V$ eine strikt größere Dimension als V, also Dimension 4. D.h. es gilt $U+V=(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$.
Nach der Dimensionsformel muss $U\cap V$ dann Dimension 1 haben. Das kann natürlich auch direkt sehen, wenn man den Schnitt (s.o.) ausrechnet oder durch Abschätzungen der Dimension. Z.B. ist $(0,0,1,1)\in U\cap V\subseteq U$ und $(1,0,0,0)\notin U\cap V$, d.h. $U\cap V$ hat mindestens Dimension 1 und höchstens Dimension $\dim U - 1 = 1$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Basis) (4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden linearen Teilräume von $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2+x_3-x_4=0\}\ , \\ V &:= \operatorname{span}\{(1,-2,3,0),\ (2,0,3,1)\}\ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U, V, $U\cap V$ und $U+V$.

Lösungshinweise: Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind (keiner ist ein Vielfaches des Anderen), bilden sie eine Basis von V.
Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ besteht aus allen Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Diese bilden somit eine Basis von U.
Der Untervektorraum V besteht aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ -2\lambda \\ 3\lambda + 3\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in die definierende Gleichung für U ein, so erhalten wir

$$0 = (\lambda + 2\mu) - (-2\lambda) + (3\lambda + 3\mu) - \mu = 6\lambda + 4\mu.$$

und somit $\mu = -\frac{3}{2}\lambda$. Damit besteht der Durchschnitt $U \cap V$ aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Eine Basis von $U \cap V$ ist also der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Der Vektorraum $U + V$ wird von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Eine Basis bestimmt man durch das Anwenden des Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis von $U + V$.

Aufgabe H2 (Basen über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) (4 Punkte)
Betrachten Sie den Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

(a) Nennen Sie alle Basen des Vektorraums $\mathbb{K}^2$.

(b) Wieviele verschiedene Basen hat der Vektorraum $\mathbb{K}^3$?

(c) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Anzahl der verschiedenen Basen des Vektorraums $\mathbb{K}^n$ an.

Begründen Sie Ihre Antworten.
Hinweis: Wieviele Elemente hat ein n-dimensionaler Teilraum?

Lösungshinweise:

(a) $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$ und $\{(0,1),(1,1)\}$.

(b) $\mathbb{K}^3$ ist 3-dimensional und hat $2^3 = 8$ Elemente. Für die Wahl des ersten Vektors v_1 habe wir $2^3 - 1 = 7$ Möglichkeiten (Null geht nicht). Der von v_1 erzeugte Teilraum ist $\{0, v_1\}$. Für die Wahl des zweiten Vektors v_2 bleiben also noch $2^3 - 2 = 6$ Möglichkeiten. Der aufgespannte Teilraum besteht aus allen $\mathbb{K}$-Linearkombinationen von v_1 und v_2, also aus $2^2 = 4$ Elementen (genauer aus $\{0, v_1, v_2, v_1 + v_2\}$). Für die Wahl des dritten Basisvektors v_3 gibt es damit noch $2^3 - 2^2 = 4$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also

$$(2^3 - 1) \cdot (2^3 - 2) \cdot (2^3 - 2^2) = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$$

Möglichkeiten Trippel (v_1, v_2, v_3) zu wählen, so dass v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{K}^3$ bilden. Da die Reihenfolge bei der Basis keinen Rolle spielt, gibt es somit $168/3! = 28$ verschiedenen Basen von $\mathbb{K}^3$.

(c) Mit der analogen Argumentation (und vollständiger Induktion) gibt es

$$\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$$

verschiedene Basen von $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe H3 (Dimension und Dimensionsformel) (4 Punkte)

(a) Sei U ein linearer Teilraum eines n-dimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie: $\dim(U) \leq n$, und es gilt genau dann $\dim(U) = n$, wenn $U = V$.

(b) Seien U und W jeweils 2-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie $U \cap W \neq \{0\}$.

(c) Seien U und W zwei verschiedene 4-dimensionale Untervektorräume eines 6-dimensionalen Vektorraumes V. Welche Dimension kann der Teilraum $U \cap W$ haben? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

(d) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension $\dim U =: r < n$. Zeigen Sie: U ist der Schnitt aller $(n-1)$-dimensionalen Untervektorräume $W \subseteq V$ mit $U \subseteq W$.

Lösungshinweise:

(a) Jede Basis von U lässt sich zu einer Basis von V erweitern. Da eine Basis von V (höchstens) n Elemente besitzt, kann eine Basis von U auch höchstens n Elemente besitzen.

Klar, für $U = V$ ist $\dim(U) = n$. Ist umgekehrt $\dim(U) = n$, so gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von U aus n Elementen. Diese lässt sich zu einer Basis von V erweitern. Weil jede Basis von V aber aus (höchstens) n Vektoren besteht, können beim Erweitern keine Vektoren hinzu gekommen sein. Also muss es sich schon um eine Basis von V gehandelt haben, d.h. die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ erzeugen ganz $V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = U$.

(b) Die Summe $U+W$ ist höchstens 3-dimensional. Nach der Dimensionsformel hat der Schnitt also mindestens Dimension $2+2-3=1$.

(c) Weil U und w verschieden sind, ist die Summe $U+W$ echt größer als U und als W, hat also mindestens Dimension 5. Wegen der Dimension von V hat die Summe höchstens Dimension 6. Aufgrund der Dimensionsformel

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) = 8$$

kommen für den Schnitt nur die Dimensionen 2 und 3 in Frage.

(d) Wir bezeichnen mit $\bar{U}$ den Schnitt aller $(n-1)$-dimensionalen Teilräume $W \subseteq V$ mit $U \subseteq W$. Als Schnitt von Teilräumen ist $\bar{U}$ wieder ein Teilraum, und nach Konstruktion gilt $U \subseteq \bar{U}$. Es genügt also $U \supseteq \bar{U}$ zu zeigen. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, es gibt einen Vektor $v \in \bar{U} \setminus U$. Wähle eine Basis $v_1, \dots, v_r$ von U. Dann ist die Menge $v_1, \dots, v_r, v$ linear unabhängig. Ergänze diese Menge zu einer Basis $v_1, \dots, v_r, v, v_{r+2}, \dots, v_n$ von V. Dann ist die Menge $v_1, \dots, v_r, v_{r+2}, \dots, v_n$ noch immer linear unabhängig. Betrachte den davon erzeugten Teilraum

$$W := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r, v_{r+2}, \dots, v_n\}\,.$$

Weil die Erzeuger linear unabhängig sind, also eine Basis, ist W ein $(n-1)$-dimensionaler Teilraum. Weil $v_1, \dots, v_r$ in W liegen, gilt auch $U = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq W$. Per Definition folgt $\bar{U} \subseteq W$. Andererseits gilt $v \notin W$, denn sonst wären $v_1, \dots, v_r, v, v_{r+2}, \dots, v_n$ nicht linear unabhängig. Ein Widerspruch ($v \notin W \supseteq \bar{U} \ni v$).

Hallo Studis,
Die Weihnachtszeit steht vor der Tür und wie jedes Jahr verwandelt sich der Mathebau zu dieser Zeit in einen Adventskalender, der Süßigkeiten und Überraschungen für euch bereit hält! An einigen Bürotüren hängen Plakate mit Rätseln, welche eine (Tages)Zahl ergeben. Klopft ihr am richtigen Tag an die richtige Tür, erwarten euch Plätzchen, Lebkuchen und ein freundlicher Professor oder Mitarbeiter. Außerdem könnt ihr Stempel sammeln und an der Verlosung weiterer toller Preise teilnehmen. Mehr Infos gibt es unter www.mathebau.de.
Weihnachtliche Grüße,
Eure Fachschaft