Lineare Algebra 1
6. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
24. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Welche der Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$?

[ ] eine beliebige einpunktige Menge,
[ ] eine Gerade durch den Ursprung,
[ ] $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$,
[ ] ein Kreis mit Radius 1 um $(0,0)$,
[ ] $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$,
[ ] $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

[ ] Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

[ ] Die Summe zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

[ ] Der Schnitt zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

Lösungshinweise:

(a) Nur die gerade durch den Ursprung ist ein Untervektorraum. (Die einpunktige Menge $\{v\}$ noch für $v=0$.)

(b) Summe und Schnitt von linearen Teilräumen sind wieder lineare Teilräume. Die Vereinigung von linearen Teilräumen ist nur dann ein linearer Teilraum, wenn die Teilräume ineinander enthalten sind.

Aufgabe G2

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$U := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}, \qquad V := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_2\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Ist $U+V=\mathbb{R}^3$? Ist $U \oplus V = \mathbb{R}^3$?

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die Kürzungsregel für direkte Summen: Sind A, B, C lineare Teilräume eines Vektorraumes V mit $A \oplus B = A \oplus C$, so gilt $B = C$.

Lösungshinweise:

a) Zunächst ist $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. Mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, ist auch $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, sowie $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. Daher ist U ein Untervektorraum.

Vollkommen analog zeigt man, daß V ein Untervektorraum ist:

Zunächst ist $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$. Mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U$, ist auch $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in U$, sowie $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \in U$.

b) Es ist $U + V = \mathbb{R}^3$, denn für ein beliebig gegebenes $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ hat man die Darstellung

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei offensichtlich $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

Die Summe ist nicht direkt. Dafür gibt es zwei Argumentationsweisen: Einmal reicht $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \cap V \neq \{0\}$ aus, zum anderen kann man aber auch Beispiele angeben, die verschiedene Darstellungen haben, etwa $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei offenbar $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

c) Die Aussage ist falsch. Betrachte dazu in $\mathbb{R}^2$ die folgenden drei verschiedenen jeweils durch Geraden durch den Nullpunkt gegebenen Untervektorräume: $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$, $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$. Nach dem Kriterium ist $\mathbb{R}^2 = A \oplus B = A \oplus C$, denn die Geraden schneiden sich nur in 0.

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (0, 4, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (1, 2, 0)$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.

Lösungshinweise: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Das entstehende Gleichungssystem hat die Form $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T = 0$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Mit Gauß-Jordan-Algorithmus rechnet man nach, dass es für dieses System nur eine Lösung gibt, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Aufgabe G4 ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

Erinnern Sie sich an Ihr Schulwissen über die Division mit Rest. Sei $n \geq 2$ eine feste natürliche Zahl. Für eine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$[x] := x + n\mathbb{Z} := \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

(a) Machen Sie sich klar, dass $3 + 5\mathbb{Z} = 8 + 5\mathbb{Z}$ gilt. Wieviele verschiedene Mengen der Form $x + n\mathbb{Z}$ mit $x \in \mathbb{Z}$ gibt es, d.h. wieviele Elemente hat die Menge

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[x] \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{x + n\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ ?}$$

Hinweis: Finden Sie für $x \in \mathbb{Z}$ eine möglichst kleine Zahl $r \geq 0$ mit $x + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$.

Auf der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definieren wir zwei Verknüpfungen durch [1]

$$[x] + [y] := [x + y] \,, \qquad\qquad [x] \cdot [y] := [x \cdot y] \,.$$

(b) Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auf.

(c) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Elemente $[2]^2$, $[2]^3$, $[2]^4$, $[2]^5$, $[2]^6$ und $[2]^7$. Welche Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind (multiplikativ) invertierbar? Geben Sie jeweils das Inverse.

(d) Wie würden Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist? Skizzieren Sie den Beweis.

(e) In den Hausübungen werden Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für eine Primzahl n ein Körper ist. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrung gilt, d.h. ist n keine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kein Körper.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt $x + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$, wobei $0 \le r < n$ den Rest bei Division von x durch n bezeichnet. Die Menge $\mathbb{Z}/nZ$ hat also genau n Elemente, nämlich $[0], \dots, [n-1]$.

(b)

+	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]		[4]	[0]	[1]
[3]			[1]	[2]
[4]				[3]

·	[2]	[3]	[4]
[2]	[4]	[1]	[3]
[3]		[4]	[2]
[4]			[1]

(c) Alle Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind invertierbar. Die Inversen und Potenzen kann man direkt von der Tabelle ablesen.

(d) Direktes Nachrechnen und die Ring-Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ nutzen.

(e) Ist $n = x \cdot y$ mit $x, y > 1$. Dann gilt $[0] = [n] = [x] \cdot [y]$. Also hat $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Nullteiler.

Aufgabe G5

(a) In Aufgabe G3 haben wir gezeigt, dass die Vektoren $v_1 = (0,4,1)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (1,2,0)$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 aufgefasst als Vektoren im Vektorraum $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ linear abhängig sind.

(b) Machen Sie sich klar, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation ist. Zeigen Sie, dass 1 und $\sqrt{2}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Lösungshinweise:

(a) Man geht analog zur vorherigen Aufgabe vor. Über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ergeben sich jedoch Lösungen, z.B. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4,1,3)$, d.h.

$$4v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \,.$$

(b) Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $q_1 + q_2\sqrt{2} = 0$. Multiplikation mit $q_1 - q_2\sqrt{2}$ ergibt $0 = q_1^2 - 2q_2^2$. Nehmen wir $q_2 \neq 0$ an, so folgt $(q_1/q_2)^2 = 2$. Der Quotient $q := q_1/q_2$ ist also eine rationale Zahl mit $q^2 = 2$. Da 2 jedoch keine rationale Wurzel hat, ergibt sich ein Widerspruch. Es muss somit $q_2 = 0$ und damit auch $q_1 = 0 - q_2\sqrt{2} = 0$ gelten.

Hausübung

Aufgabe H1 (Der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) (4 Punkte)

Sei $p \ge 2$ eine Primzahl. Wir haben in Aufgabe G4 gesehen, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sogar ein Körper ist. Wir müssen dazu wir lediglich noch zeigen, dass jedes Element $[0] \neq [x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Wir gehen in folgenden Schritten vor:

(a) Mit Hilfe der Zerlegung in Primfaktoren kann man zeigen, dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt

Ist $x \cdot y$ ein Vielfaches von p, so ist x ein Vielfaches von p oder y ein Vielfaches von p.

[1] Sind Sie mit dieser Definition zufrieden? Was müsste man hier eigentlich noch zeigen?

Sie brauchen diese Aussage nicht beweisen. Zeigen Sie damit, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ keine Nullteiler besitzt.

(b) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Folgern Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $[x]^k = [0]$, so gilt bereits $[x] = [0]$. Folgern Sie weiter für $k_2 > k_1$: Ist $[x]^{k_1} = [x]^{k_2}$, so gilt entweder $[x] = [0]$ oder $[x]^{k_2-k_1} = [1]$.

(c) Sei nun $[0] \neq [x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es Exponenten $k_1 \neq k_2$ gibt mit $[x]^{k_1} = [x]^{k_2}$.
Hinweis: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat nur endlich viele Elemente.

(d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Lösungshinweise:

(a) a ist genau dann ein Vielfaches von p, wenn $[a] = [0]$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt.

(b) Induktionsanfang klar. Sei $[x]^{k+1} = [0]$. Dann gilt $[0] = [x]^k \cdot [x]$. Weil $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ keine Nullteiler besitzt, folgt daraus $[x] = [0]$ oder $[x]^k = [0]$, woraus mit Induktion auch $[x] = 0$ folgt.

(c) Weil $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ endlich ist, können nicht alle Zahlen $[x]^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ verschieden sein, d.h. es gibt $k_1 \neq k_2$ mit $[x]^{k_1} = [x]^{k_2}$.

(d) Einfach zusammenbauen: Für $[x] \neq [0]$ gibt es $k_1 \neq k_2$, o.B.d.A. $k_1 < k_2$, mit $[x]^{k_1} = [x]^{k_2}$. Es folgt ($[x] = [0]$ geht ja nicht) $[x]^{k_2-k_2} = [1]$, also

$$[1] = [x] \cdot [x]^{k_2-k_1-1}\,.$$

Aufgabe H2 (Lineare Unabhängigkeit) (4 Punkte)

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. 5. Übung, H3).

(a) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := e^x, \quad f_2(x) := x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sind die folgenden Funktionen f_1, f_2, f_3 in V linear unabhängig?

$$f_1(x) := \sin^2 x, \quad f_2(x) := \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie jeweils ihre Behauptungen.

Lösungshinweise:

(a) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \vec{0}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 e^x + \lambda_2 x = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte 0 und 1 ein, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot e + \lambda_2 \cdot 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\lambda_1 = 0$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man auch $\lambda_2 = 0$. Also sind f_1 und f_2 linear unabhängig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Es ist also

$$f_1 + f_2 - f_3 = \vec{0}\,.$$

D.h. f_1, f_2 und f_3 sind linear abhängig.

(c) Aus $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \vec{0}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0$. Setzt man hier für x die speziellen Werte $0, 1$ und -1 ein, so ergibt sich das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
D.h. f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe H3 (Direkte Summen) (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des reellen Vektorraumes $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (vgl. 5. Übung, H3):

$$V_+ := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}.\quad f(x)=f(-x)\}\,,$$
$$V_- := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}.\quad f(x)=-f(-x)\}\,.$$

Bemerkung: Die Funktionen $f\in V_+$ heißen *gerade Funktionen*, die Funktionen $f\in V_-$ *ungerade Funktionen*.

(a) Geben Sie jeweils zwei von Null verschiedene Vektoren aus V_+ und V_- an.

(b) Zeigen Sie, dass V_+ und V_- lineare Teilräume von $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind.

(c) Zeigen Sie $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_+\oplus V_-$.

Lösungshinweise:

(b) Nachrechnen.

(c) Für ein Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definieren wir $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f_1(x) := \tfrac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big)\,, \qquad\qquad f_2(x) := \tfrac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big)\,.$$

Dann gilt $f_1\in V_+$ und $f_2\in V_-$ und $f=f_1+f_2$ (nachrechnen), d.h. $V=V_++V_-$.
Für eine Funktion $f\in V_+\cap V_-$ gilt

$$f(x)=f(-x)=-f\big(-(-x)\big)=-f(x)$$

für jedes x, also $f(x)=0$. D.h. $V_+\cap V_-=\{0\}$.