Lineare Algebra 1
5. Übungsblatt
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger

WS 2011/2012
17. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Für den Minitest sollten Sie höchstens 15 Minuten brauchen.

(a) Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Ausdrücke sind dann definiert?
[ ] AB, [ ] BA, [ ] $A+B$, [ ] CD,
[ ] DC, [ ] C^2, [ ] D^2.
Berechnen Sie die definierten Ausdrücke.

(b) Welche der folgenden Gleichungen gelten für beliebige $n \times n$-Matrizen A, B und die Einheitsmatrix E_n?
[ ] $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, [ ] $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$,
[ ] $(A+E_n)(A-E_n) = A^2 - E_n$.

(c) Bestimmen Sie den Real und Imaginärteil von $z_1 + z_3$, $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für die komplexen Zahlen

$$z_1 := 3+4i\,, \qquad z_2 := -2+i\,, \qquad z_3 := 7-i\,.$$

Lösungshinweise:

(c) Definiert sind AB, BA, CD und C^2, die restlichen Ausdrücke sind nicht definiert.

(d) Es gilt nur $(A+E_n)(A-E_n) = A^2 - E_n$.

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}
c_1 &= z_1 + z_3 &&= (3+4i)+(7-i) &&= 10+3i \\
c_2 &= z_1 z_2 &&= (3+4i)(-2+i) &&= -6+3i-8i-4 &&= -10-5i \\
c_3 &= \frac{z_1}{z_2} &&= \frac{3+4i}{-2+i} &&= \frac{(3+4i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} \\
& &&= \frac{-6-3i-8i+4}{4+1} &&= -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Fingerübungen in Körpern)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{K}$:

(a) $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$,
(b) $a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \vee b = 0)$,
(c) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$,
(d) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Lösungshinweise:

1. Es gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Zieht man nun von beiden Seiten der Gleichung $a \cdot 0$ ab, so erhlt man $0 = a \cdot 0$. Da die Multiplikation kommutativ ist, gilt somit auch $0 \cdot a = 0$.
2. Es gelte $a \cdot b = 0$ für zwei Elemente $a, b \in \mathbb{K}$. Ist b nicht die Null, so kann man beide Seiten der Gleichung von Rechts mit b^{-1} multiplizieren. Durch Rechtsmultiplikation mit dem Inversen b^{-1} zu b erhält man $a = a(b \cdot b^{-1}) = 0 \cdot b^{-1} = 0$, d.h. $a = 0$.
3. Es gilt $ab + a(-b) = a(b - b) = a \cdot 0 = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$. Somit ist $a(-b)$ das Inverse von ab bezüglich der Addition, d.h. $a(-b) = -(ab)$.
4. Nach Teilaufgabe 3 gilt $(-a)(-b) = -(-ab)$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$. Somit folgt $(-ab) + (-a)(-b) = (-ab) - (-ab) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$, d.h. $(-a)(-b)$ ist das Inverse von $-ab$ bezüglich der Addition, d.h. $(-a)a(-b) = (ab)$.

Aufgabe G3
Man sagt, dass zwei quadratische Matrizen A, B *kommutieren*, falls $AB = BA$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Gilt $AB = 0$ für zwei Matrizen A, B, so folgt $A = 0$ oder $B = 0$.
(b) Diagonalmatrizen kommutieren mit allen Matrizen der gleichen Größe.
(c) Diagonalmatrizen der gleichen Größe kommutieren.

Lösungshinweise:

(a) Ein Gegenbeispiel liefern die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(b) Ein Gegenbeispiel liefern die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(c) Seien A, B zwei $(n \times n)$-Diagonalmatrizen mit Diagonaleinträgen a_i bzw. b_i, d.h.

$$A =: \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \qquad B =: \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

Weil die Multiplikation der reellen Zahlen kommutativ ist, gilt dann

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_na_n \end{pmatrix} = BA.$$

Aufgabe G4 (Zusatzaufgabe, Der Ring der Ganzen Gauß'schen Zahlen)
Betrachten Sie die folgende Teilmengen komplexer Zahlen:

$$\mathbb{Z}[i] := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(b) Besitzt $\mathbb{Z}[i]$ Nullteiler?

(c) Ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Körper? Welche Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ besitzen ein multiplikatives Inverses?

Lösungshinweise:

(a) Man rechnet schnell nach, dass die Addition und Multiplikation zweier Zahlen aus $\mathbb{Z}[i]$ tatsächlich wieder in $\mathbb{Z}[i]$ liegt. Wir wissen, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen Körper bilden. Also ist die Addition und die Multiplikation auf $\mathbb{Z}[i]$ assoziativ, kommutativ und erfüllt das Distributivgesetz.

(b) Weil $\mathbb{C}$ keine Nullteiler besitzt, hat auch $\mathbb{Z}[i]$ keine Nullteiler.

(c) Ein Element $x + iy \in \mathbb{Z}[i]$ ist genau dann invertierbar, wenn das Inverse in $\mathbb{C}$, $(x+iy)^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ wieder in $\mathbb{Z}[i]$ liegt, d.h. $\frac{x}{x^2+y^2}$ und $\frac{y}{x^2+y^2}$ müssen ganze Zahlen sein. Es muss also $x^2 + y^2 = 1$ sein. Damit bleibt als invertierbare Element nur $1, -1, i, -i$ übrig.

Hausübung

Aufgabe H1 (Fingerübungen in Vektorräumen) (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$: [1]

(a) $0 \cdot v = 0$ und $\lambda \cdot 0 = 0$.

(b) $(-1) \cdot v = (-v)$.

(c) Gilt $\lambda \cdot v = 0$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = 0$.

Lösungshinweise:

(a) Wegen der Distributivität gilt $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = (0 \cdot v) + (0 \cdot v)$. Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung das additive Inverse von $0 \cdot v$, ergibt sich die Behauptung.

(b) Wegen $1 \cdot v = v$ und der Distributivität ergibt sich mit den vorherigen Aufgabenteil

$$v + \big((-1) \cdot v\big) = (1 \cdot v) + \big((-1) \cdot v\big) = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0\,.$$

Durch Addition der Gleichung mit dem additiven Inversen von v ergibt sich dann die Behauptung.

(c) Sei $\lambda \cdot v = 0$. Ist $\lambda = 0$, ist die Behauptung bewiesen. Ist $\lambda \neq 0$, so ergibt sich mit dem ersten Aufgabenteil

$$0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1}(\lambda \cdot v) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v\,.$$

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Welche Matrizen kommutieren mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

[1] Man beachte, dass das Symbol 0 für verschiedene neutrale Elemente verwendet wird, nämlich $0 \in \mathbb{K}$ (Skalar) und $0 \in V$ (Nullvektor).

Lösungshinweise: Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -c \\ d & -e & -f \\ g & -h & -i \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}.$$

Wenn die Matrizen kommutieren, gilt also $-b = b$, $-c = c$, $-d = d$, $-g = g$, d.h. $b = c = d = g = 0$. Sie ist also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}.$$

Man rechnet außerdem leicht nach, dass alle Matrizen dieser Form tatsächlich mit der gegebenen Matrix kommutieren.

Aufgabe H3 (Funktionen- und Folgenräume) (4 Punkte)
Sei M eine beliebige Menge mit mindestens 2 Elementen. Wir bezeichnen mit $\mathscr{F}(M,\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$. Wir definieren auf $\mathscr{F}(M,\mathbb{R})$ eine Addition und Skalarmultiplikation durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \qquad x \in M$$

für alle $f, g \in \mathscr{F}(M,\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathscr{F}(M,\mathbb{R})$ bildet mit den obigen Verknüpfungen einen Vektorraum.

(b) Finden einen Untervektorraum von $\mathscr{F}(M,\mathbb{R})$, der nicht $\{0\}$ oder $\mathscr{F}(M,\mathbb{R})$ selbst ist (mit Nachweis).

Lösungshinweise:

(a) Das neutrale Element des Vektorraumes ist die konstante Nullabbildung $M \to \mathbb{K}, x \mapsto 0$. Alle Vektorraumaxiome lassen sich direkt nachweisen, indem man die Funktionen punktweise auswertet. Wir zeigen beispielhaft die Kommutativität der Addition: Seien $f, g \in \mathscr{F}(M,\mathbb{K})$. Dann gilt für alle $x \in M$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),$$

d.h. $f + g = g + f$.

(b) Für $x \in M$ ist nicht-trivialer Untervektorraum ist z.B. $U := \{f \in \mathscr{F}(M,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$. Klar ist, dass U und $\mathscr{F}(M,\mathbb{R})$ verschieden sind. Dass $U \neq \{0\}$ gilt, folgt daraus, dass M noch mindestens ein weiteres Element $x \neq y$ enthält.